Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 53-60
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147271

高阶数值导数的分数阶Tikhonov正则化方法

张　龙

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年5月30日；录用日期：2024年6月29日；发布日期：2024年7月18日

摘　要

在本文中，我们关注高阶数值导数问题，该问题是不适定的。为了解决这一反问题，我们提出了分数阶Tikhonov正则化方法，用于从一维噪声数据中计算高阶数值导数。本文先用Fourier变换求出问题的精确解，再用分数阶Tikhonov正则化方法构造出问题的正则化解，最后讨论了先验正则化参数选择规则下精确解与正则化近似解的误差估计。

关键词

数值微分，反问题，分数阶Tikhonov正则化，误差估计

Fractional Tikhonov Regularization Method for Higher-Order Numerical Derivatives

Long Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 30th, 2024; accepted: Jun. 29th, 2024; published: Jul. 18th, 2024

Abstract

In this paper, we focus on the higher-order numerical derivative problem, which is ill-determined. To solve this inverse problem, we propose a fractional Tikhonov regularization method for calculating higher-order numerical derivatives from one-dimensional noisy data. In this paper, the Fourier transform is used first to write the exact solution of the problem, and then the regularization solution of the problem is constructed by fractional Tikhonov regularization method. Finally, the error estimation of the exact solution and regularization approximate solution under the prior regularization parameter selection rules is discussed.

文章引用: 张龙. 高阶数值导数的分数阶 Tikhonov 正则化方法[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 53-60.
DOI: 10.12677/pm.2024.147271

Keywords

Numerical Differentiation, Inverse Problem, Fractional Tikhonov Regularization, Error Estimation

1. 介绍

数值微分问题是一个经典的不适定问题，我们在很多的关于不适定问题的著作里会提到它[1]-[3]。它是最基础的不适定问题，同时数值微分在科学研究和实际应用中也是非常重要的。例如图像处理[4]、Abel 积分方程的求解[5]、求解 Volterra 积分方程[6]、识别问题[7]等都需要处理数值微分。对物理过程的分析可能需要计算测量数据的导数，可以使用的函数值包含误差，并且数量有限。数据的数值微分包含了复杂逆问题可能表现出的许多微妙之处和陷阱。众所周知，数值微分问题在某些意义下是不适定的，输入数据中的任意小的差异，可能导致所求近似导数中的任意大的误差。或者说，通过函数在有限个点的值来求其导数的问题是不适定的。为了克服反问题的不适定性，我们就需要运用正则化方法。正则化方法是一种求解不适定问题的近似方法，所以解决这个问题的一个关键是建立稳定的算法。对于数值微分这个问题的研究，过去几年中出现了许多计算方法，例如差分方法[7]-[9]、Tikhonov 正则化方法[10] [11]、软化方法[12]。虽然关于数值微分问题有许多的研究成果，但是目前存在的研究主要针对的是一维情形，而在实际应用中，二维情形下的数值微分问题更具有实际意义。

在标准 Tikhonov 正则化方法下，为了能够得到更多近似解的细节，Klann 等于 2006 年提出了分数次 Tikhonov 正则化方法[13]，来克服经典 Tikhonov 方法求得的近似解过度光滑的缺陷。2012 年，Li 等在考虑热传导问题时提出了一种新的分数次 Tikhonov 正则化方法[14]。在[15]中，作者应用这一方法求解 Helmholtz 方程的柯西问题。在本文中，我们使用分数次 Tikhonov 正则化方法来解决高阶数值微分问题。我们分析了数值微分问题的不适定性，然后提出了该方法(参照第 2 节)。在第 3 节中，我们给出了先验正则化参数选择规则下的收敛性估计。

2. 不适定性分析

这节我们考虑数值微分问题的不适定性并讨论如何稳定高阶数值导数，考虑函数 $h(x)\in L^2(R)$，设 $\hat{h}$ 为 h 的傅里叶变换，即：

$$\hat{h}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R h(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

现在我们考虑函数 $h(x)$ 的 k 阶导数，$k=1,2,\cdots$ 并定义 $h^{(k)}(x)=\frac{\mathrm{d}^k h(x)}{\mathrm{d}x^k}$，进行傅里叶变换，即：

$$\widehat{h^{(k)}(x)}=(i\xi)^k\hat{h}(\xi), \tag{2}$$

则：

$$h^{(k)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R (i\xi)^k\hat{h}(\xi)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

其中，$(i\xi)^k$ 是从 h 到 $h^{(k)}$ 的“核”。

当我们在 $L^2(R)$ 中考虑问题时，由于输入数据 h 在实际中是由物理测量得到的，存在一定的误差，所以我们用 $h_\delta(x)\in L^2(R)$ 表示误差数据，满足：

$$\|h_\delta - h\| \le \delta, \tag{4}$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示 L^2 的范数，$\delta>0$ 表示数据的噪声水平。因此，如果我们试图获得高阶数值导数，那么误差中的高频成分会被放大，可能会破坏解，所以该问题是不适定的。在[16]中，将“核”$(i\xi)^k$ 修改为 $\dfrac{(i\xi)^k}{1+(\mu|\xi|)^{2k}}$，通过修正法稳定问题，并得到误差估计。在本文中，我们提出分数次 Tikhonov 正则化方法，处理该不适定问题。对确切的输入数据施加一个先验界，即：

$$\|h\|_p \le E,\ p\ge 0. \tag{5}$$

其中，$E>0$ 为常数，$\|\cdot\|_p$ 是 Sobolev 空间 $H^p(R)$ 的范数，定义为：

$$\|h(\cdot)\|_p = \left(\int_R \left(1+\xi^2\right)^p \left|\hat{h}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

即：

$$\left\|h^{(k)}(\xi)\right\|_p = \left(\int_R \left(1+\xi^2\right)^p \left|\hat{h}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \le E. \tag{7}$$

我们引入如下定义的分数次 Tikhonov 正则化方法[17]：

$$\left(A^*A+\mu I\right)^\gamma h_{\mu,\gamma} = \left(A^*A\right)^{\gamma-1} A^* h_\delta. \tag{8}$$

其中，$A: X\to Y$ 是有界线性算子，A^* 是 A 的伴随算子，X,Y 是 Hilbert 空间。$\frac{1}{2}<\gamma\le 1$，如果 $\gamma=1$ 会得到标准的 Tikhonov 正则化方法，这里选择 $\frac{1}{2}<\gamma<1$，来克服近似解的过度平滑效应并获得更多精确解的细节[17]。

分数次 Tikhonov 正则化方法是一种基于滤波器的滤子正则化方法，过滤子提供了对正则化方法性质的洞察。我们结合标准 Tikhonov 正则化方法的基本思想[18]，分数次 Tikhonov 正则化方法可用类似的方式给出[17]。假定 A 为紧算子，其奇异系统为 $\left(\sigma_j, x_j, y_j\right)$，$j>0$，其滤子函数为：

$$\tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma) = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\mu}\right)^\gamma. \tag{9}$$

式中，μ 作为正则化参数，$\frac{1}{2}<\gamma<1$，当 $\gamma=1$ 时，恢复为标准的 Tikhonov 正则化滤子函数。

令 $h_{\delta,\gamma}^{(k)}(x)$ 是分数次 Tikhonov 正则化方法的正则解，我们的主导思想是用 $\dfrac{\tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma)}{\sigma} = \dfrac{(i\xi)^k}{\left(1+\mu|\xi|^{2k}\right)^\gamma}$ 代替 $\dfrac{(i\xi)^k}{1+(\mu|\xi|)^{2k}}$，由式子(8)得到正则解：

$$h_{\delta,\gamma}^{(k)}(x) = \tilde{F}_{\mu,\gamma}\left(\sigma(\xi)\right)(i\xi)^k \hat{h}_\delta(\xi). \tag{10}$$

以便于用 $h_{\delta,\gamma}^{(k)}$ 来近似 h，其中 $\sigma(\xi)=|\xi|^{-k}$。

3. 先验正则化参数选取及误差估计

我们首先证明一些引理。

引理 3.1 对 $\mu>0$，$\frac{1}{2}<\gamma<1$，$k>0$，有：

$$\sup_{\xi\in R}\tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))|i\xi|^k\le\frac{c_1}{\sqrt{\mu}}. \tag{11}$$

证明：由式(9)，我们得到：

$$\sup_{\xi\in R}\tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))|i\xi|^k=\sup_{\xi\in R}|\xi|^k\left(\frac{\sigma^2(\xi)}{\sigma^2(\xi)+\mu}\right)^{\gamma}=\sup_{\xi\in R}\frac{\left(|\xi|^{-k}\right)^{2\gamma-1}}{\left(|\xi|^{-2k}+\mu\right)^{\gamma}},$$

引入变量 $x=|\xi|^{-k}$，令：

$$M(x)=\frac{x^{2\gamma-1}}{\left(\mu+x^2\right)^{\gamma}}, \tag{12}$$

$\gamma>\frac{1}{2}$ 时，函数 $M(x)$ 是连续的，而 $\lim\limits_{x\to\infty}M(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}M(x)=0$，那么 $M(x)$ 的最大值点 x_0 满足 $M'(x_0)=0$，对 $M(x)$ 求导并令 $M'(x_0)=0$，我们得到：

$$x_0=\sqrt{2\mu\gamma-\mu}.$$

将 x_0 代入 $M(x)$ 中得到：

$$M(x)\le M(x_0)=\frac{\mu^{\gamma-\frac{1}{2}}(2\gamma-1)\gamma-\frac{1}{2}}{2\mu\gamma}=\frac{(2\gamma)^{-\gamma}(2\gamma-1)^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\mu}}=\frac{c_1}{\sqrt{\mu}}, \tag{13}$$

令 $(2\gamma)^{-\gamma}(2\gamma-1)^{\gamma-\frac{1}{2}}=c_1$。由式(12)和(13)，我们有：

$$\sup_{\xi\in R}\tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))|i\xi|^k\le\frac{c_1}{\sqrt{\mu}}.$$

引理 3.2 对 $\mu>0$，$\frac{1}{2}<\gamma<1$，$k>0$，有：

$$\sup_{\xi\in R}\left(1-\tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))\right)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}}\le\begin{cases}c_2\mu, p\ge2k,\\ c_3\mu^{\frac{p}{2k}},0<p<2k.\end{cases} \tag{14}$$

证明：标准的 Tikhonov 正则化方法的滤子函数为：

$$F_{\mu,1}(\sigma(\xi))=\frac{\sigma^2(\xi)}{\sigma^2(\xi)+\mu}, \tag{15}$$

根据[19]中的命题 3.2，我们有：

$$0<F_{\mu,1}(\sigma(\xi))\le\tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi)), \tag{16}$$

由式(15)和(16)，我们有：

$$\begin{aligned}
&\sup_{\xi\in R}\left(1-\tilde{F}_{\mu,\gamma}\left(\sigma\left(\xi\right)\right)\right)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}} \le \sup_{\xi\in R}\left(1-F_{\mu,1}\left(\sigma\left(\xi\right)\right)\right)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}}\\
&=\sup_{\xi\in R}\left(\frac{\mu}{\sigma^2\left(\xi\right)+\mu}\right)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}} \le \sup_{\xi\in R}\left(\frac{\mu}{\sigma^2\left(\xi\right)+\mu}\right)\left|\xi\right|^{-p}\\
&=\sup_{\xi\in R}\left(\frac{\mu}{\left|\xi\right|^{-2k}+\mu}\right)\left|\xi\right|^{-p}\\
&=\sup_{\xi\in R}\frac{\mu\left|\xi\right|^{-p}}{\left|\xi\right|^{-2k}+\mu}\\
&=\sup_{\xi\in R}\frac{\mu\left|\xi\right|^{2k-p}}{1+\mu\left|\xi\right|^{2k}}.
\end{aligned}$$

引入变量 $y=\left|\xi\right|\ge\lambda_1$， λ_1 为常数。令：

$$N\left(y\right)=\frac{\mu y^{2k-p}}{\mu y^{2k}+1}, \tag{17}$$

若 $2k-p\le 0$， 即 $p\ge 2k$， 有：

$$N\left(y\right)=\frac{\mu y^{2k-p}}{\mu y^{2k}+1}\le \mu y^{2k-p}=\mu\frac{1}{y^{p-2k}}\le\mu\frac{1}{\lambda_1^{p-2k}}=c_2\mu\,. \tag{18}$$

令 $\frac{1}{\lambda_1^{p-2k}}=c_2$ 。

若 $2k-p>0$，即 $0<p<2k$，函数 $N\left(y\right)$ 是连续的，而 $\lim_{y\to\infty}N\left(y\right)=0$， $\lim_{y\to 0}N\left(y\right)=0$，那么 $N\left(y\right)$ 的最大值点 y_0 满足 $N'\left(y_0\right)=0$，对 $N\left(y\right)$ 求导并令 $N'\left(y_0\right)=0$，我们得到：

$$y_0=2k\sqrt{\frac{2k-p}{\mu p}}\,.$$

将 y_0 代入 $N\left(y\right)$ 中得到：

$$\begin{aligned}
N\left(y\right)&\le N\left(y_0\right)\\
&=\frac{\mu\left[2k\left(2k-p\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mu p\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{2k-p}}{\mu\left[2k\left(2k-p\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mu p\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{2k}+1}\\
&=\frac{1}{2}p^{\frac{p}{2k}}k^{-1}\left(2k-p\right)^{1-\frac{p}{2k}}\mu^{\frac{p}{2k}}\\
&=c_3\mu^{\frac{p}{2k}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

令 $\frac{1}{2}p^{\frac{p}{2k}}k^{-1}\left(2k-p\right)^{1-\frac{p}{2k}}=c_3$，结合式子(17)、(18)和(19)，我们有：

$$\sup_{\xi\in R}\left(1-\tilde{F}_{\mu,\gamma}\left(\sigma\left(\xi\right)\right)\right)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}}\le\begin{cases}c_2\mu,\ p\ge 2k,\\ c_3\mu^{\frac{p}{2k}},\ 0<p<2k.\end{cases}$$

我们将会得到如下定理：

定理 3.1 设 $h^{(k)}\left(x\right)$ 是精确解， $h^{(k)}_{\delta,\gamma}\left(x\right)$ 是由式(8)确定的正则解，如果先验条件(7)和噪声水平估计(4)

都满足，并假设引理 3.1 和引理 3.2 都成立，那么如下的收敛估计式成立：

1) 如果 $p \ge 2k$，并选择正则化参数 $\mu = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{3}}$，我们得到如下收敛估计：

$$\left\| h^{(k)}(x) - h_{\delta,\gamma}^{(k)}(x) \right\| \le (c_1 + c_2)\delta^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}. \tag{20}$$

2) 如果 $0 < p < 2k$，并选择正则化参数 $\mu = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2k}{p+k}}$，我们得到如下收敛估计：

$$\left\| h^{(k)}(x) - h_{\delta,\gamma}^{(k)}(x) \right\| \le (c_1 + c_3)\delta^{\frac{p}{p+k}} E^{\frac{k}{p+k}}. \tag{21}$$

证明：定义 $h_{\gamma}^{(k)}(x)$ 为：

$$h_{\gamma}^{(k)}(x) = \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))(i\xi)^k \hat{h}(\xi). \tag{22}$$

由 Parseval 关系式，并使用三角不等式，我们得到：

$$\begin{aligned}
&\left\| h^{(k)}(x) - h_{\delta,\gamma}^{(k)}(x) \right\| \\
&= \left\| \hat{h}^{(k)}(x) - \hat{h}_{\delta,\gamma}^{(k)}(x) \right\| \\
&\le \left\| \hat{h}^{(k)}(x) - \hat{h}_{\gamma}^{(k)}(x) \right\| + \left\| \hat{h}_{\delta,\gamma}^{(k)}(x) - \hat{h}_{\gamma}^{(k)}(x) \right\| \\
&= \left\| (i\xi)^k \hat{h}(\xi) - \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))(i\xi)^k \hat{h}(\xi) \right\| + \left\| \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))(i\xi)^k \hat{h}_{\delta}(\xi) - \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))(i\xi)^k \hat{h}(\xi) \right\| \\
&= \left(\int_R \left| \left(1 - \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))\right)(i\xi)^k \hat{h}(\xi) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_R \left| \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))(i\xi)^k \left(\hat{h}_{\delta}(\xi) - \hat{h}(\xi)\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_R \left| \left(1 - \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))\right)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}} \left(1+\xi^2\right)^{\frac{p}{2}} (i\xi)^k \hat{h}(\xi) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{\xi \in R} \left| \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))(i\xi)^k \right| \delta \\
&\le \sup_{\xi \in R} \left(1 - \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))\right)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}} E + \sup_{\xi \in R} \left| \tilde{F}_{\mu,\gamma}(\sigma(\xi))(i\xi)^k \right| \delta \\
&\le E \begin{cases} c_2 \mu, p \ge 2k \\ c_3 \mu^{\frac{p}{2k}}, 0 < p < 2k \end{cases} + \delta \frac{c_1}{\sqrt{\mu}},
\end{aligned}$$

选择正则化参数 μ，如下：

$$\begin{cases} \mu = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{3}}, p \ge 2k, \\ \mu = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2k}{p+k}}, 0 < p < 2k. \end{cases}$$

那么我们会得到：

$$\left\| h^{(k)}(x) - h_{\delta,\gamma}^{(k)}(x) \right\| \le \begin{cases} (c_1 + c_2)\delta^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}, p \ge 2k, \\ (c_1 + c_3)\delta^{\frac{p}{p+k}} E^{\frac{k}{p+k}}, 0 < p < 2k. \end{cases}$$

定理得证。

注解：由以上结果可以得到，当 $\delta \to 0$ 时，精确解和正则化近似解很接近。以上结果还具有特殊意义，收敛估计是 $\delta^{\frac{2}{3}}$，满足 $\|h_\delta - h\| \le \delta$ 的正则化解的误差估计 $\left\|h^{(k)}(x) - h_{\delta,\gamma}^{(k)}(x)\right\|$ 最好也只能达到 $\delta^{\frac{2}{3}}$。

4. 总结与展望

本文解决了一个不适定问题，即从一维噪声数据中计算高阶数值导数。本文先用 Fourier 变换推导出问题的精确解，再用分数阶 Tikhonov 正则化方法构造出问题的正则化解，最后给出了先验正则化参数选择规则下精确解与正则化近似解的误差估计。

需要指出，分数阶 Tikhonov 正则化方法虽然克服了经典 Tikhonov 正则化方法求得的近似解过度光滑的缺陷，但是对于分数阶 Tikhonov 正则化方法也无法克服经典 Tikhonov 正则化方法的饱和收敛结果。另外一方面，目前存在的研究主要针对的是一维情形，而在实际应用中，二维情形下的数值微分问题更具有实际意义。所以在接下来的研究中，进一步探究如何克服分数阶 Tikhonov 正则化方法求解数值微分问题的饱和收敛结果，以及考虑能否将同样的方法推广至高维情形。

参考文献

[1] Rivlin, T.J. (1975) Optimally Stable Lagrangian Numerical Differentiation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **12**, 712-725. https://doi.org/10.1137/0712053

[2] Wang, Y.B., Jia, X.Z. and Cheng, J. (2002) A Numerical Differentiation Method and Its Application to Reconstruction of Discontinuity. *Inverse Problems*, **18**, 1461-1476. https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/6/301

[3] Anderssen, R.S. and Hegland, M. (1999) For Numerical Differentiation, Dimensionality Can Be a Blessing! *Mathematics of Computation*, **68**, 1121-1141. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-99-01033-9

[4] Deans, S.R. (1983) The Radon Transform and Some of Its Applications. Reprint of the 1993 Original. John Wiley & Sons, New York.

[5] Cheng, J., Hon, Y.C. and Wang, Y.B. (2004) A Numerical Method for the Discontinuous Solutions of Abel Integral Equations. In: Isozaki, H., Ed., *Inverse Problems and Spectral Theory*, Vol. 348, American Mathematical Society, Providence, 233-243.

[6] Gorenflo, R. and Vessella, S. (1991) Abel Integral Equations. Analysis and Applications. Springer-Verlag, Berlin.

[7] Ramm, A.G. and Smirnova, A.B. (2001) On Stable Numerical Differentiation. *Mathematics of Computation*, **70**, 1131-1154. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-01-01307-2

[8] Groetsch, C.W. (1991) Differentiation of Approximately Specified Functions. *The American Mathematical Monthly*, **98**, 847-850. https://doi.org/10.1080/00029890.1991.12000802

[9] Qu, R. (1996) A New Approach to Numerical Differentiation and Integration. *Mathematical and Computer Modelling*, **24**, 55-68. https://doi.org/10.1016/s0895-7177(96)00164-1

[10] Cullum, J. (1971) Numerical Differentiation and Regularization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **8**, 254-265. https://doi.org/10.1137/0708026

[11] Hanke, M. and Scherzer, O. (2001) Inverse Problems Light: Numerical Differentiation. *The American Mathematical Monthly*, **108**, 512-521. https://doi.org/10.1080/00029890.2001.11919778

[12] Qian, Z., Fu, C., Xiong, X. and Wei, T. (2006) Fourier Truncation Method for High Order Numerical Derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, **181**, 940-948. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.01.057

[13] Klann, E., Maaß, P. and Ramlau, R. (2006) Two-Step Regularization Methods for Linear Inverse Problems. *Journal of Numerical Mathematics*, **14**, 583-607. https://doi.org/10.1163/156939406778474523

[14] Li, M. and Xiong, X. (2012) On a Fractional Backward Heat Conduction Problem: Application to Deblurring. *Computers & Mathematics with Applications*, **64**, 2594-2602. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.07.003

[15] Qian, Z. and Feng, X. (2016) A Fractional Tikhonov Method for Solving a Cauchy Problem of Helmholtz Equation. *Applicable Analysis*, **96**, 1656-1668. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1254776

[16] Qian, Z., Fu, C. and Feng, X. (2006) A Modified Method for High Order Numerical Derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 1191-1200. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.059

[17] Gerth, D., Klann, E., Ramlau, R. and Reichel, L. (2015) On Fractional Tikhonov Regularization. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **23**, 611-625. https://doi.org/10.1515/jiip-2014-0050

[18] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[19] Klann, E. and Ramlau, R. (2008) Regularization by Fractional Filter Methods and Data Smoothing. *Inverse Problems*, **24**, Article ID: 025018. https://doi.org/10.1088/0266-5611/24/2/025018