Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 23-29
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147267

Hans汉斯

一类半线性脉冲发展方程(ω,c)-周期解的存在性

郭红玉

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年5月17日；录用日期：2024年6月17日；发布日期：2024年7月16日

摘 要

文章用算子半群理论和Schauder不动点定理证明了Banach空间中一类半线性脉冲发展方程

$$\begin{cases} x'(t)=Ax(t)+f(t,x(t)), t\in R^+, t\neq\tau_i, i\in \mathrm{N}:=\{1,2,\cdots\}, \\ \Delta x|_{t=\tau_i}=x(\tau_i^+)-x(\tau_i^-)=Bx(\tau_i^-)+c_i, \end{cases}$$

(ω,c)-周期mild解的存在性。其中，A是稠定闭线性算子，生成X中的C_0半群$T(t)(t\geq 0)$，B是有界线性算子，$f\in C(R^+\times X,X)$，且f满足$f(t+\omega,cx)=cf(t,x)$。$x(\tau_i^-)$和$x(\tau_i^+)$分别表示$x(t)$在$t=\tau_i$处的左右极限。

关键词

脉冲发展方程，(ω,c)-周期Mild解，Schauder不动点定理，格林函数

Existence of (ω,c)-Periodic Solutions for a Class of Semilinear Impulsive Evolution Equations

Hongyu Guo

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 17th, 2024; accepted: Jun. 17th, 2024; published: Jul. 16th, 2024

Abstract

The existence of (ω,c)-periodic mild solutions for a class of semilinear impulsive evolution equa-

文章引用: 郭红玉. 一类半线性脉冲发展方程(ω,c)-周期解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 23-29.
DOI: 10.12677/pm.2024.147267

tions in Banach space is proved by operator semigroup theory and Schauder fixed point theorem in this paper.

$$\begin{cases} x'(t)=Ax(t)+f(t,x(t)), t\in R^{+}, t\neq\tau_i, i\in \mathrm{N}:=\{1,2,\cdots\}, \\ \Delta x|_{t=\tau_i}=x(\tau_i^{+})-x(\tau_i^{-})=Bx(\tau_i^{-})+c_i, \end{cases}$$

Where A is a coherently closed linear operator that generates a C_0 semigroup $T(t)(t\geq 0)$ in X, B is the bounded operator, $f\in C(R^{+}\times X,X)$, and f satisfies $f(t+\omega,cx)=cf(t,x)$, $x(\tau_i^{-})$ and $x(\tau_i^{+})$ represent the left and right limits of $x(t)$ at $t=\tau_i$.

Keywords

Impulsive Evolution Equation, (ω,c)-Periodic Mild Solution, Schauder Fixed Point Theorem, Green Function

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

脉冲微分方程理论被广泛应用于种群动力学、生物系统、最优控制问题以及金融系统等领域。含有脉冲的发展方程具有的共同特征是，在发展过程的某些时刻都经历了状态的突然变化，因此具有更丰富的应用背景，事实上，脉冲与各种发展方程都密切相关。因此，要精确地描述和分析发展系统就很有必要考虑脉冲问题。周期运动是自然科学中常见且非常重要的现象。脉冲周期系统是研究周期演化过程中状态发生突变的动力学模型。在过去的几十年里，关于有限维和无穷维空间中脉冲周期系统解的存在性问题的研究得到了许多重要的结果[1]-[7]。

最近，Alvarez 等[8]通过研究著名的 Mathieu 方程 $x''+ax=2q\cos(2t)x$ 的任意解 $x(t)$ 的性质 $x(\cdot+\omega)=cx(\cdot)$ 引入了 (ω,c)-周期函数的概念。显然，当 $c=1$ 和 $c=-1$ 时，(ω,c)-周期函数分别为标准的 ω 周期函数和 ω-反周期函数。2018 年，Li 等[9]研究了脉冲方程 $\begin{cases} x'(t)=Ax+f(t,x), t\neq\tau_i, i\in \mathrm{N}:=\{1,2,\cdots\} \\ \Delta x|_{t=\tau_i}=x(\tau_i^{+})-x(\tau_i^{-})=Bx(\tau_i^{-})+c_i \end{cases}$ 的 (ω,c)-周期解，其中 A、B 是矩阵。2020 年，Agaoglou 等[10]利用 (ω,c)-周期函数的概念研究了复 Banach 空间中半线性发展方程 $x'=Ax+f(t,x)$ (ω,c)-周期解的存在唯一性。接着，Liu 等[11]研究了一类新的 (ω,c)-周期非瞬时脉冲微分方程，利用不动点定理证明了该类方程 (ω,c)-周期解的存在唯一性。2022 年，Feckan 等[12]研究了脉冲方程 (ω,T)-周期解的存在唯一性。受以上文献的启发，本文研究了如下脉冲微分方程的 (ω,c)-周期 mild 解。

$$\begin{cases} x'(t)=Ax(t)+f(t,x(t)), t\in R^{+}, t\neq\tau_i, i\in \mathrm{N}:=\{1,2,\cdots\}, \\ \Delta x|_{t=\tau_i}=x(\tau_i^{+})-x(\tau_i^{-})=Bx(\tau_i^{-})+c_i, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，A 是稠定闭线性算子，生成 X 中的 C_0 半群 $T(t)(t\geq 0)$。B 是有界线性算子，$f\in C(R^{+}\times X,X)$，且 f 满足 $f(t+\omega,cx)=cf(t,x)$。$x(\tau_i^{-})$ 和 $x(\tau_i^{+})$ 分别表示 $x(t)$ 在 $t=\tau_i$ 处的左右极限。此外，假设

$x(\tau_i^-)=x(\tau_i)$，为了方便讨论方程(1.1)，我们给出如下基本假设：

(H_1) A 是稠定闭线性算子，生成 X 中的 C_0 半群 $T(t)(t\ge 0)$，B 是有界线性算子，且满足 $T(t)B=BT(t)$；

(H_2) $c_i,\tau_i>0$，满足 $c_{i+m}=c_i$，$\tau_{i+m}=\tau_i+\omega$，$i\in\mathrm{N}$，其中 $m\triangleq i(0,\omega)$ 代表区间 $[0,\omega]$ 上脉冲点的个数；

(H_3) $c\notin\sigma\left(T(\omega)(E+B)^m\right)$，即 $\left(cE-\left(T(\omega)(E+B)^m\right)\right)^{-1}$ 存在，其中 $\sigma(\cdot)$ 表示线性算子的谱，E 是单位算子；

(H_4) 存在常数 $\mu,\nu\ge 0$，使得 $\|f(t,x)\|\le\mu+\nu\|x\|$，$\forall t\in R^+$，$x\in X$；

(H_5) $T(t)(t\ge 0)$ 是紧半群。

2. 预备知识

设 X 是 Banach 空间，其范数为 $\|\cdot\|$。再引进一个 Banach 空间 $\left\{x:R^+\to X:x\in C\left((t_i,t_{i+1}],X\right),x(t_i^-)=x(t_i),\forall i\in\mathrm{N},\text{且}x(t_i^+)\text{存在}\right\}$，其范数为 $\|x\|_{PC}=\sup\limits_{t\in R^+}\|x(t)\|$。

定义 2.1 [13]若 X 为 Banach 空间，$B(X)$ 表示 X 中线性有界算子全体构成的 Banach 空间。假设 $T(t):[0,\infty]\to B(X)$ 满足：

1) $T(0)=I$；

2) 对 $\forall t,s\ge 0$，$T(t+s)=T(t)T(s)$。

则称 $T(t)t\ge 0$ 为 X 中的线性算子半群。

若 1)和 2)满足，且对 $\forall x\in X$，有 $\lim\limits_{h\to 0^+}T(h)x=x$，则称 $T(t)t\ge 0$ 为 X 中的强连续半群，也称为 C_0-半群。

若 1)和 2)满足，且有 $\lim\limits_{t\to 0^+}\|T(t)-I\|=0$，则称 $T(t)t\ge 0$ 为 X 中的一致连续半群。

引理 2.2 [13]设 $T(t)t\ge 0$ 为 X 中的强连续半群，则存在常数 $\omega\ge 0$ 和 $M\ge 1$，使得：

$$\|T(t)\|\le M\mathrm{e}^{\omega t},(t\ge 0).$$

定义 2.3 [8]对所有的 $t\in R^+$，如果 $f(t+\omega)=cf(t)$，则称函数 $f:R^+\to X$ 是 (ω,c)-周期的，其中 $c\in R\setminus\{0\}$，$\omega>0$。

设 $\Phi_{\omega,c}=\left\{x:x\in PC(R^+,X),cx(\cdot)=x(\cdot+\omega)\right\}$，则 $\Phi_{\omega,c}$ 表示所有分段连续的 (ω,c)-周期函数的集合。

引理 2.4 [10] $x\in\Phi_{\omega,c}$ 当且仅当：

$$x(\omega)=cx(0). \tag{2.1}$$

引理 2.5 设(H_1)和(H_2)成立。齐次线性脉冲方程初值问题：

$$\begin{cases}x'(t)=Ax,t\in R^+,t\ne\tau_i,i\in\mathrm{N},\\ \Delta x|_{t=\tau_i}=Bx,\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{2.2}$$

有一个解 $x\in\Phi_{\omega,c}$ 当且仅当：

$$\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)x_0=0.$$

证明 对任意的 $t\in[0,\infty)\setminus\xi$，$\xi=\{\tau_i\}_{i\in N}$，方程(2.2)的解 $x\in PC(R^+,X)$ 为：

$$x(t)=T(t)(E+B)^{i(0,t)}x_0,t\ge 0.$$

对任意的 $t\in[0,\infty)\setminus\xi$，

$$x(t+\omega)=cx(t)\Leftrightarrow T(t+\omega)(E+B)^{i(0,t+\omega)}x_0=cT(t)(E+B)^{i(0,t)}x_0$$
$$\Leftrightarrow T(t)T(\omega)(E+B)^{i(0,t)}(E+B)^{i(t,t+\omega)}x_0=cT(t)(E+B)^{i(0,t)}x_0$$
$$\Leftrightarrow T(\omega)(E+B)^{i(t,t+\omega)}x_0=cx_0$$
$$\Leftrightarrow \left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)x_0=0$$

接下来，主要考虑非齐次线性脉冲发展方程：

$$\begin{cases} x'(t)=Ax+g(t),t\in R^+,t\neq\tau_i,i\in \mathrm{N}, \\ \Delta x|_{t=\tau_i}=Bx+c_i \end{cases} \tag{2.3}$$

(ω,c)-周期 mild 解的存在性，其中 $g\in C(R^+,X)$ 是 (ω,c)-周期函数。

引理 2.6 [12]设(H_1)~(H_3)成立。非齐次脉冲发展方程(2.3) (ω,c)-周期 mild 解 $x\in\Omega:=PC([0,\omega],X)$，其表达式为：

$$x(t)=\int_0^\omega G(t,\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m G(t,\tau_i)c_i, \tag{2.4}$$

其中，$G(t,\tau)$ 是 Green 函数，其定义为：

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\left(T(t)(E+B)^{i(0,t)}\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}T(\omega-t)(E+B)^{i(t,\omega)}+E\right)T(t-\tau)(E+B)^{i(\tau,t)},0<\tau<t, \\ T(t)(E+B)^{i(0,t)}\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}T(\omega-\tau)(E+B)^{i(t,\omega)},t\le\tau<\omega.\end{cases} \tag{2.5}$$

引理 2.7 [12]设(H_1)~(H_3)成立。对任意的 $t\in[0,\omega]$，有如下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^m\left\|G(t,\tau_i)c_i\right\|$$
$$\le M_\eta=\begin{cases} M\max\left\{\left\|(E+B)^{2m}\right\|,1\right\}\mathrm{e}^{\eta\omega}\left(\left\|\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}\right\|M+1\right)\sum_{1<i<m}\mathrm{e}^{\eta(\omega-\tau_i)}\left\|c_i\right\|,\eta>0, \\ M\max\left\{\left\|(E+B)^{2m}\right\|,1\right\}\left(\left\|\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}\right\|M+1\right)\sum_{1<i<m}\left\|c_i\right\|,\eta\le 0.\end{cases}$$

引理 2.8 [12]设(H_1)~(H_3)成立。对任意的 $t\in[0,\omega]$，有如下不等式成立：

$$\int_0^\omega\left\|G(t,\tau)\right\|\mathrm{d}\tau$$
$$\le N_\eta=\begin{cases}\left\{M\max\left\{\left\|(E+B)^{2m}\right\|,1\right\}\left\|\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}\right\|\mathrm{e}^{\eta\omega}+\max\left\{\left\|(E+B)^m\right\|,1\right\}\right\}M\dfrac{\mathrm{e}^{\eta\omega}-1}{\eta},\eta\neq 0, \\ \left\{M\max\left\{\left\|(E+B)^{2m}\right\|,1\right\}\left\|\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}\right\|+\max\left\{\left\|(E+B)^m\right\|,1\right\}\right\}M\omega,\eta=0.\end{cases}$$

引理 2.9 [14] (Schauder 不动点定理)设 X 为 Banach 空间，B 为 X 中的有界凸比子集。若算子为 $L:B\to B$ 为全连续算子，则算子 L 在 X 中至少存在一个不动点。

3. 主要定理

定理 3.1 设(H_1)~(H_5)成立。如果 $0<vN_\eta<1$，则半线性脉冲发展方程(1.1)有一个 (ω,c)-周期 mild 解 $x\in\Phi_{\omega,c}$。

证明 令 $B_r=\left\{x\in\Omega \mid \|x\|_{PC}\le r\right\}$， $r=\dfrac{\mu N_\eta+M_\eta}{1-\nu N_\eta}$。在 B_r 上定义如下算子 Λ 如下：

$$(\Lambda x)(t)=\int_0^\omega G(t,\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m G(t,\tau_i)c_i, \tag{3.1}$$

首先证明 $\Lambda(B_r)\subset B_r$。对任意的 $x\in B_r$ 和 $t\in[0,\omega]$，由引理 2.7 和 2.8，有：

$$\begin{aligned}\|(\Lambda x)(t)\| &\le \int_0^\omega \|G(t,\tau)f(\tau,x(\tau))\|\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m\|G(t,\tau_i)c_i\|\\ &\le \mu\int_0^\omega\|G(t,\tau)\|\mathrm{d}\tau+\nu\int_0^\omega\|G(t,\tau)\|\|x(\tau)\|\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m\|G(t,\tau_i)c_i\|\\ &\le \mu N_\eta+\nu N_\eta\|x\|_{PC}+M_\eta=r,\end{aligned}$$

所以 $\Lambda(B_r)\subset B_r$。

下证 Λ 是连续的。

设 x_n 是 B_r 中的柯西列，且 $x_n\to x(n\to\infty)$。记 $f_n=f(\cdot,x_n(\cdot))$， $f=f(\cdot,x(\cdot))$。

由 f 的连续性可得， $f_n\to f(n\to\infty)$。

由(3.1)式，有：

$$\begin{aligned}\|(\Lambda x_n)(t)-(\Lambda x)(t)\| &\le \int_0^\omega\|G(t,\tau)\|\|f(\tau,x_n(\tau))-f(\tau,x(\tau))\|\mathrm{d}\tau\\ &\le \int_0^\omega\|G(t,\tau)\|\mathrm{d}\tau\|f_n-f\|\le M_\eta\|f_n-f\|\\ &\to 0.\end{aligned}$$

因此， Λ 是连续的。

最后证明 $\Lambda(B_r)$ 是相对紧的。由 $\Lambda(B_r)\subset B_r$， 易见 $\Lambda(B_r)$ 是一致有界的。下证 Λ 是等度连续算子。对任意的 $0<t_1<t_2\le\omega$ 和 $x\in B_r$， 有：

$$\begin{aligned}&\|(\Lambda x)(t_2)-(\Lambda x)(t_1)\|\\ &\le \int_0^\omega\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\|\|f(\tau,x(\tau))\|\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m\|G(t_2,\tau_i)-G(t_1,\tau_i)\|\|c_i\|\\ &\le\left(\mu+\nu\|x\|_{PC}\right)\int_0^\omega\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\|\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m\|G(t_2,\tau_i)-G(t_1,\tau_i)\|\|c_i\|.\end{aligned}$$

由(2.5)式，

$$\begin{aligned}&\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\|\\ &=\begin{cases}\Big\|T(t_2)(E+B)^{i(0,t_2)}\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}T(\omega-\tau)(E+B)^{i(\tau,\omega)}\\ +T(t_2-\tau)(E+B)^{i(\tau,t_2)}-T(t_1)(E+B)^{i(0,t_1)}\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}\\ \times T(\omega-\tau)(E+B)^{i(\tau,\omega)}-T(t_1-\tau)(E+B)^{i(\tau,t_1)}\Big\|,0<\tau<t_1<t_2,\\ \Big\|T(t_2)(E+B)^{i(0,t_2)}\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}T(\omega-\tau)(E+B)^{i(\tau,\omega)}\\ -T(t_1)(E+B)^{i(0,t_1)}\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}T(\omega-\tau)(E+B)^{i(\tau,\omega)}\Big\|,t_1<t_2<\tau<\omega.\end{cases}\end{aligned}$$

如果 $0<\tau<t_1<t_2$，有：

$$
\begin{aligned}
&\left\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\right\| \\
&\le \left\|T(t_2)-T(t_1)\right\|\left\|(E+B)^{2m}\right\|\left\|\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}\right\|Me^{\eta(\omega-\tau)} \\
&\quad+\left\|T(t_2-\tau)-T(t_1-\tau)\right\|\left\|(E+B)^m\right\|.
\end{aligned}
$$

由半群 $T(t)(t\ge 0)$ 的紧性知，$\left\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\right\|\to 0(t_2-t_1\to 0)$。

如果 $t_1<t_2<\tau<\omega$，则 A：

$$
\begin{aligned}
&\left\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\right\| \\
&\le \left\|T(t_2)-T(t_1)\right\|\left\|(E+B)^{2m}\right\|\left\|\left(cE-T(\omega)(E+B)^m\right)^{-1}\right\|Me^{\eta(\omega-\tau)}.
\end{aligned}
$$

再由半群 $T(t)(t\ge 0)$ 的紧性可知，$\left\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\right\|\to 0(t_2-t_1\to 0)$。

所以，对任意的 $0<t_1<t_2<\omega$ 都满足：

$$
\left\|G(t_2,\tau)-G(t_1,\tau)\right\|\to 0，\quad t_2-t_1\to 0。 \tag{3.2}
$$

这意味着当 $t_2-t_1\to 0$ 时，$\left\|(\Lambda x)(t_2)-(\Lambda x)(t_1)\right\|\to 0$。因此，算子 Λ 是等度连续算子。

在 B_r 上作算子 Λ_ε 如下：

$$
(\Lambda_\varepsilon x)(t)=T(\varepsilon)\left(\int_0^\omega G(t-\varepsilon,\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m G(t-\varepsilon,\tau_i)c_i\right),\quad t\in[0,\omega].
$$

令 $K=\{(\Lambda x)(t):t\in[0,\omega]\}$，$K_\varepsilon=\{(\Lambda_\varepsilon x)(t):t\in[0,\omega]\}$，$0<\varepsilon<\omega$，由条件($H_5$)，$K_\varepsilon$ 是相对紧的。

所以，对任意的 $x\in B_r$ 有：

$$
\begin{aligned}
&\left\|(\Lambda x)(t)-(\Lambda_\varepsilon x)(t)\right\| \\
&\le \int_0^\omega \left\|G(t,\tau)-G(t-\varepsilon,\tau)\right\|\left\|f(\tau,x(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m\left\|G(t,\tau_i)-G(t-\varepsilon,\tau_i)\right\|\left\|c_i\right\| \\
&\le (\mu+\nu r)\int_0^\omega \left\|G(t,\tau)-G(t-\varepsilon,\tau)\right\|\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m\left\|G(t,\tau_i)-G(t-\varepsilon,\tau_i)\right\|\left\|c_i\right\|
\end{aligned}
$$

由(3.2)式，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\left\|(\Lambda x)(t)-(\Lambda_\varepsilon x)(t)\right\|\to 0$，所以 K 在 X 中相对紧。根据 Arzela-Ascoli 定理，K 在 $PC([0,\omega],X)$ 上相对紧，所以 Λ 是全连续算子。由 Schauder 不动点定理半线性脉冲发展方程，(1.1)至少有一个 (ω,c)-周期 mild 解。

4. 结论

本文讨论了 Banach 空间中一类半线性脉冲发展方程 (ω,c)-周期解的存在性，首先给出了非齐次脉冲发展方程 (ω,c)-周期 mild 解的表达形式，其次在紧半群情形下利用 Schauder 不动点定理证明了系统(1.1) (ω,c)-周期 mild 解的存在性。

参考文献

[1] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1993) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Longman Scientific & Technical.

[2] Cooke, C.H. and Kroll, J. (2002) The Existence of Periodic Solutions to Certain Impulsive Differential Equations. *Com-*

puters & Mathematics with Applications, **44**, 667-676. https://doi.org/10.1016/s0898-1221(02)00181-5

[3] Li, X., Bohner, M. and Wang, C.-K. (2015) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. *Automatica*, **52**, 173-178. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.11.009

[4] Liang, J., Liu, J.H. and Xiao, T.-J. (2011) Periodic Solutions of Delay Impulsive Differential Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **74**, 6835-6842. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.07.008

[5] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1995) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific.

[6] Ahmed, N.U., Teo, K.L. and Hou, S.H. (2003) Nonlinear Impulsive Systems on Infinite Dimensional Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **54**, 907-925. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(03)00117-2

[7] Fečkan, M., Ma, R. and Thompson, B. (2007) Forced Symmetric Oscillations. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, **14**, 73-85. https://doi.org/10.36045/bbms/1172852245

[8] Alvarez, E., Gómez, A. and Pinto, M. (2018) (ω, c)-Periodic Functions and Mild Solutions to Abstract Fractional Integro-Differential Equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 16, 1-8. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.16

[9] Li, M., Wang, J.-R. and Feckan, M. (2018) (ω, c)-Periodic Solutions for Impulsive Differential Systems. *Communications in Mathematical Analysis*, **21**, 35-46.

[10] Agaoglou, M., Panagiotidou, A.P. and Fečkan, M. (2020) Existence and Uniqueness of (ω, c)-Periodic Solutions of Semilinear Evolution Equations. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, **10**, 149-166. https://doi.org/10.1504/ijdsde.2020.10027757

[11] Liu, K., Wang, J.-R., O'Regan, D. and Fečkan, M. (2020) A New Class of (ω, c)-Periodic Non-Instantaneous Impulsive Differential Equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **17**, Article No. 155. https://doi.org/10.1007/s00009-020-01574-8

[12] Fečkan, M., Liu, K. and Wang, J. (2022) (ω, c)-Periodic Solutions of Impulsive Evolution Equations. *Evolution Equations & Control Theory*, **11**, 415-437. https://doi.org/10.3934/eect.2021006

[13] Pazy, A. (1983) Semigroups of Liear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[14] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 第 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.