Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(6), 440-446
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.146262

Hans汉斯

数论函数方程$Z(n)=\varphi_5(SL(n))$的可解性

向万国，尹　秘，王　军*，钟佐琴

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2024年5月17日；录用日期：2024年6月18日；发布日期：2024年6月30日

摘　要

本文利用伪Smarandache函数、Smarandache LCM函数以及广义欧拉函数的基本性质，讨论了数论函数方程$Z(n)=\varphi_e(SL(n))(e=5)$的可解性，证明了该方程无正整数解。

关键词

伪Smarandache函数，Smarandache LCM函数，广义欧拉函数，整数解

The Solvability of Arithmetic Equation $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$

Wanguo Xiang, Mi Yin, Jun Wang*, Zuoqin Zhong

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: May 17th, 2024; accepted: Jun. 18th, 2024; published: Jun. 30th, 2024

Abstract

In this paper, the solvability of the number theoretic function $Z(n)=\varphi_e(SL(n))(e=5)$ is discussed by using the basic properties of pseudo-Smarandache function, Smarandache LCM function and generalized Euler function. It is proved that this equation has no positive integer solution.

*通讯作者。

文章引用: 向万国, 尹秘, 王军, 钟佐琴. 数论函数方程$Z(n)=\varphi_5(SL(n))$的可解性[J]. 理论数学, 2024, 14(6): 440-446. DOI: 10.12677/pm.2024.146262

Keywords

Pseudo-Smarandache Function, Smarandache LCM Function, Generalized Euler Function, Integer Solution

1. 引言

数论函数是数论中的一个重要研究课题，是研究各种数论问题不可缺少的工具。很早之前，著名数论专家 Smarandache 提出了数论函数 $S(n)$，称之为 Smarandache 函数，其定义是：

$$S(n)=min\{m:n\,|\,m!\}$$

后来，因为研究的需要，人们根据 $S(n)$ 定义了数论函数 $Z(n)$ 和 $SL(n)$，它们的定义分别是：对任意的正整数 n，

$$Z(n)=\min\left\{m:m\in\mathbb{Z}^{+},n\,\Big|\,\frac{m(m+1)}{2}\right\},SL(n)=\min\{m:m\in\mathbb{Z}^{+},n\,|\,lcm[1,2,3,\cdots,m]\}$$

其中 $lcm[x,y]$ 表示正整数 x 和 y 的最小公倍数。前者称之为伪 Smarandache 函数[1]，后者称之为 Smarandache LCM 函数[2]。

本文的研究是涉及数论函数 $Z(n)$，$SL(n)$ 及 $\varphi_e(n)$。其中 $\varphi_e(n)$ 是广义欧拉函数[3] [4]，它是欧拉函数的推广，其定义如下：

$$\varphi_e(n)=\sum_{\substack{i=1\\ \gcd(i,n)=1}}^{[n/e]}1$$

即，$\varphi_e(n)$ 等于序列 $0,1,\cdots,[n/e]$ 中与 n 互素的数的个数，其中 $[x]$ 是 Gauss 取整函数。

关于 $\varphi_e(n)$ 的表达式的研究，到目前为止，已经有了一些成果。最近，蔡天新等在文献[5] [6]中，得到了 $\varphi_e(n)(e=2,3,4,6)$ 的表达式。文献[7]得到了 $\varphi_e(n)(e=8,12)$ 的表达式。文献[8]使用模 p 相关的同余方程，得到了 $\varphi_p(n)$ 的一个递归公式，本文将利用这个递归公式，解决数论函数方程 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 的可解性。

本文的研究方程涉及三类数论函数，他们分别是 $SL(n)$，$Z(n)$ 和 $\varphi_e(n)$。近来，很多学者对这三者相关联的数论函数方程进行研究，并取得了一些好的结果。例如，朱山山[9]讨论了数论函数方程 $t\varphi(n)+\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$ 的正整数解。在文献[10]中，张四保研究了方程 $\varphi_2(n)=S(SL(n^k))(k=15,17)$ 的可解性，并得到其所有正整数解。文献[11]中，曹盼盼研究了数论函数方程 $\varphi_2(n)=S(n^{28})$ 的可解性，并给其所有正整数解。文献[12]中，朱杰研究了方程 $Z(n)=\varphi_e(SL(n))(e=2,3,4,6)$ 的可解性，并给出其所有正整数解。

本文在文献[12]的基础上，利用 $\varphi_e(n)(e=5)$ 的递归公式，研究了数论函数方程 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 的可解性。

为次，我们需要给出下面的一些定义与引理。

2. 相关的定义及引理

定义 1 [8]对任意的正整数 t 和 $e\ge 2$，矩阵 $A_e(t)=\left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le[(e-1)/2]}$ 为

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, & tj\equiv i\,(mod\ e);\\ -1, & tj\equiv e-i\,(mod\ e);\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

定义 2 [8]对任意整数 a 和非负整数 λ，

$$\bar{A}_e(a,\lambda)=\begin{cases}A_e\left(a^{\lambda}\right)-A_e\left(a^{\lambda-1}\right), & \lambda>0;\\ \mathrm{I}_{\left[\frac{e-1}{2}\right]\times\left[\frac{e-1}{2}\right]}, & \lambda=0.\end{cases}$$

为叙述方便，先规定一些记号。设正整数 $n>1$ 的标准分解式为 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，记 $\Omega(n)$ 为 n 的素因子个数(重复计数)，$\omega(n)$ 为 n 的不同的素因子个数，即 $\Omega(n)=\sum_{i=1}^{s}k_i$，$\omega(n)=s$，并规定 $\Omega(1)=\omega(1)=0$。对于给定的正整数 n，假设 $n=5^r\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{k_i}p_{i,j}^{r_{i,j}}$，其中 $k_1,\cdots,k_4$ 是正整数，$r,r_{11},\cdots,r_{1,k_1},\cdots,r_{4,1},\cdots,r_{4,k_4}$ 是非负整数；$p_{1,1},\cdots p_{1,k_1},\cdots,p_{4,1},\cdots,p_{4,k_4}$ 是不同的素数，满足 $\gcd\left(p_{i,j},5\right)=1$，且 $p_{i,j}\equiv i\,(mod5)$，$(i=1,\cdots,4;\ j=1,\cdots,k_i)$。这里 $\gcd(x,y)$ 表示 x 和 y 的最大公因子。规定 $\Omega_{l,t}^{5}(n)$ 是满足条件 $r_{i,j}\equiv t\,(mod4)$，且 $p_{i,j}\equiv l\,(mod5)$，$(l=1,\cdots,4;t=1,\cdots,4)$ 的数 $p_{i,j}^{r_{i,j}}$ 的个数，记 $\Omega_l^5(n)=\sum_{t=1}^{4}\Omega_{l,t}^{5}(n)$，$\omega_4^5(n)=\sum_{j=0}^{1}\Omega_{4,2j+1}^{5}(n)$。

引理 1 [8]对于素数 5 和任意的正整数 n 且 $n>5$，假设 $n=5^r\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{k_i}p_{i,j}^{r_{i,j}}$，则

$$\varphi_5(n)=\begin{cases}\frac{1}{5}\varphi(n), & r\ge 2 \text{ or } \Omega_1^5(n)\ge 1;\\ \frac{1}{5}\varphi(n)+\frac{(-1)^{r+\omega_4^5(n)}2^{\Omega_4^5(n)-1}}{5}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\prod_{i=2}^{3}\prod_{j=1}^{4}\bar{A}_5(i,j)^{\Omega_{i,j}^5(n)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

推论 1 若正整数 $n=5^{\beta}$，则 $\varphi_5(n)=\frac{1}{5}\varphi\left(5^{\beta}\right)$，其中 $\beta\ge 2$ 为整数。

推论 2 若正整数 $n=p^{\beta}$，其中 p 为素数，且 $(p,5)=1$ 则有如下结论。为了叙述方便，先规定记号

$$\delta(i,j)=\begin{cases}1, & \text{if } \beta\equiv i\,(mod4)\\ -1, & \text{if } \beta\equiv j\,(mod4)\end{cases}(1\le i,j\le 4).$$

(1) 若 $p\equiv 1(mod5)$，则 $\Omega_1^5\left(p^{\beta}\right)=1$，故 $\varphi_5\left(p^{\beta}\right)=\frac{1}{5}\varphi\left(p^{\beta}\right)$。

(2) 若 $p\equiv 2(mod5)$，则

$$\varphi_5\left(p^{\beta}\right)=\begin{cases}\frac{\varphi\left(p^{\beta}\right)+\delta(3,1)}{5}, & \text{if } \beta\equiv 1,3(mod4)\\ \frac{\varphi\left(p^{\beta}\right)+2\delta(4,2)}{5}, & \text{if } \beta\equiv 2,4(mod4)\end{cases}$$

(3) 若 $p\equiv 3(mod5)$，则

$$\varphi_5\left(p^{\beta}\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(p^{\beta}\right)+2\delta(3,1)}{5}, & \text{if } \beta\equiv 1,3(mod\,4)\\ \dfrac{\varphi\left(p^{\beta}\right)+\delta(4,2)}{5}, & \text{if } \beta\equiv 2,4(mod\,4)\end{cases}$$

(4) 若 $p\equiv 4(mod\,5)$，则

$$\varphi_5\left(p^{\beta}\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(p^{\beta}\right)-3}{5}, & \text{if } \beta\equiv 1,3(mod\,4)\\ \dfrac{\varphi\left(p^{\beta}\right)+3}{5}, & \text{if } \beta\equiv 2,4(mod\,4)\end{cases}$$

证明：(1) 是显然的。(2) 如果 $n=p^{\beta}$，且 $p\equiv 2(mod\,5)$，$\beta\equiv 1(mod\,4)$，则 $\Omega_{2,1}^{5}(n)=\Omega_{2,1}^{5}\left(p^{\beta}\right)=1$，显然有

$$\bar{A}_5(2,1)=\bar{A}_5(3,2)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\bar{A}_5(3,3)=\bar{A}_5(2,4)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_5(2,3)=\bar{A}_5(3,4)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\bar{A}_5(2,2)=\bar{A}_5(3,1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned}\varphi_5(n)&=\frac{1}{5}\varphi(n)+\frac{(-1)^{r+\omega_4^5(n)}2^{\Omega_4^5(n)-1}}{5}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\prod_{i=2}^{3}\prod_{j=1}^{4}\bar{A}_5(i,j)^{\Omega_{i,j}^5(n)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\varphi\left(p^{\beta}\right)+\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\frac{\varphi\left(p^{\beta}\right)-1}{5}\end{aligned}$$

其余情形类似可证。

引理 2 [12]设正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，则

$$SL(n)=\max\left\{p_i^{k_i}\mid i=1,2,\cdots,s\right\}$$

特别地，当 p 为素数及 $k\geq 1$时，$SL\left(p^k\right)=p^k$。

3. 主要定理及证明

定理 1 数论函数方程

$$Z(n)=\varphi_5\left(SL(n)\right)$$

没有正整数解。

证明：当 $n=1$ 时，$Z(1)=1$，而 $\varphi_5\left(SL(1)\right)=\varphi_5(1)=0$，显然 1 不是方程的解。

现在设 $n=2^k p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}\geq 2$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 为不同的奇素数，$k\geq 0$，$s\geq 0$，且 $k_i\geq 0(i=1,\cdots,s)$，但 k,s,k_i 不同时取 0。

(1) 若 $2^k\geq\max\left\{2^k,p_i^{k_i}\right\}$，则必有 $k\geq 1$。当 $k=1$ 时，即 $n=2$ 时，$\varphi_5\left(SL(2)\right)=\varphi_5(2)=0$，而 $Z(2)=3$，显然 $Z(2)\neq\varphi_5\left(SL(2)\right)$，故此时方程无解。若 $k=2$，则 $\varphi_5\left(SL(n)\right)=\varphi_5(4)=0$。而 $Z(n)\neq 0$，故此时方程无解。若 $k\geq 3$，则考虑如下 2 种情形。

(i) 若 $k \equiv 1,3(mod\,4)$，则 $\varphi_5(SL(n))=\varphi_5(2^k)=\dfrac{\varphi(2^k)+\delta(3,1)}{5}=\dfrac{2^{k-1}+\delta(3,1)}{5}$。如果有 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 成立，则有 $2^{k+1}\mid(2^{k-1}+\delta(3,1))(2^{k-1}+\delta(3,1)+5)$ 成立。断言 $(2^{k+1},2^{k-1}+\delta(3,1))=1$，因为 $2^{k-1}+\delta(3,1)$ 是奇数，故有 $2^{k+1}\mid(2^{k-1}+\delta(3,1)+5)$，而此式不可能成立，由此可知方程 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 无解。

(ii) 若 $k \equiv 2,4(mod\,4)$，则 $\varphi_5(SL(n))=\varphi_5(2^k)=\dfrac{\varphi(2^k)+2\delta(4,2)}{5}=\dfrac{2^{k-1}+2\delta(4,2)}{5}$。如果 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质，可知 $2^k\mid(2^{k-2}+\delta(4,2))(2^{k-1}+2\delta(4,2)+5)$ 成立。断言 $(2^k,2^{k-2}+\delta(4,2))=1$，则 $2^k\mid(2^{k-1}+2\delta(4,2)+5)$，而此式不可能成立，由此知方程 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 无解。

(2) 若 $p_s^{k_s}>\max\{2^k,p_i^{k_i}\ (1\le i\le s-1)\}$，则必有 $k_s\ge 1$。故由引理 2 可知 $SL(n)=p_s^{k_s}$，因此 $\varphi_5(SL(n))=\varphi_5(p_s^{k_s})$。为了计算 $\varphi_5(p_s^{k_s})$ 的值，将对 p_s 分 5 种情况进行讨论。

(1°) 若 $p_s=5$，当 $k_s=1$ 时，即 $5=p_s>\max\{2^k,p_i^{k_i}\ (1\le i\le s-1)\}$，故 $k=0,1$ 或 2，$s=1$ 或 2，则 $n=5,15,10,30,20,60$。此时，$\varphi_5(SL(n))=\varphi_5(p_s)=\varphi_5(5)=1$。然而，通过简单的计算，可知，无论 n 取上述何值，都有 $Z(n)\ne 1$，因此 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 不成立，此时方程无解。

当 $k_s\ge 2$ 时，则由推论 1 可知 $\varphi_5(SL(n))=\varphi_5(p_s^{k_s})=\dfrac{1}{5}\varphi_5(5^{k_s})=4\cdot 5^{k_s-2}$ 如果方程 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义必成立

$$2^k p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}\mid \frac{(4\cdot 5^{k_s-2})(4\cdot 5^{k_s-2}+1)}{2}$$

故有 $2^{k+1}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}\mid(4\cdot 5^{k_s-2})(4\cdot 5^{k_s-2}+1)$ 成立，显然有 $2\mid(4\cdot 5^{k_s-2}+1)$，然而此式不可能成立，故此时方程 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 无解。

(2°) 若 $p_s\equiv 1(mod\,5)$，由推论 2 可知 $\varphi_5(p_s^{k_s})=\dfrac{1}{5}\varphi(p_s^{k_s})=\dfrac{1}{5}p_s^{k_s-1}(p_s-1)$。如果方程 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质，则有 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1))$ 或者 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+5)$ 成立，显然上述两式均不可能成立。故此时方程无解。

(3°) 若 $p_s\equiv 2(mod\,5)$，则分如下 2 种情形进行讨论。

(i) 若 $k_s\equiv 1,3(mod\,4)$，则 $\varphi_5(SL(n))=\varphi_5(p_s^{k_s})=\dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1)+\delta(3,1)}{5}$。如果有 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 成立，根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质，有 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+\delta(3,1))$ 或者 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+\delta(3,1)+5)$ 成立。而上述两式均不可能成立。因为，若 $k_s\equiv 1(mod\,4)$，有 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)-1)$ 或者 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+4)$ 成立。此时如果 $k_s=1$，则有 $p_s\mid p_s-2$ 或者 $p_s\mid p_s+3$，显然矛盾。如果 $k_s\ne 1$，则有 $p_s\mid 1$ 或者 $p_s\mid 4$ 成立，显然矛盾。若 $k_s\equiv 3(mod\,4)$，则有 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+1)$ 或者 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+6)$ 成立。显然矛盾，故此时方程无解。

(ii) 若 $k_s\equiv 2,4(mod\,6)$，则 $\varphi_5(SL(n))=\varphi_5(p_s^{k_s})=\dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2\delta(4,2)}{5}$。如果有 $Z(n)=\varphi_5(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义可知，$p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2\delta(4,2))$ 或者 $p_s^{k_s}\mid(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2\delta(4,2)+5)$ 成立，由此便推出矛盾。

(4°) 若 $p_s\equiv 3(mod\,5)$，分 2 种情况进行讨论。

(i) 若 $k_s \equiv 1,3(mod 4)$，则有 $\varphi_5(SL(n)) = \varphi_5(p_s^{k_s}) = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2\delta(3,1)}{5}$。先看 $k_s \equiv 1(mod 4)$ 且 $p_s = 3$ 的情形，若 $k_s = 1$，则 $\varphi_5(SL(n)) = \varphi_5(3) = 0$，而 $Z(n) \neq 0$，此时方程无解。若 $p_s = 3$，且 $k_s \neq 1$ 的情形，此时 $\varphi_5(SL(n)) = \varphi_5(3^{k_s}) = \dfrac{2\cdot 3^{k_s-1}-2}{5}$。如果有 $Z(n) = \varphi_5(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义必成立

$$2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} \mid \frac{\left(\dfrac{2\cdot 3^{k_s-1}-2}{5}\right)\left(\dfrac{2\cdot 3^{k_s-1}-2}{5}+1\right)}{2}$$

故有 $2^{k+1}5^2 p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots 3^{k_s} \mid (2\cdot 3^{k_s-1}-2)(2\cdot 3^{k_s-1}+5)$ 成立，由此可知 $3^{k_s} \mid (2\cdot 3^{k_s-1}-2)$ 或者 $3^{k_s} \mid (2\cdot 3^{k_s-1}+5)$ 成立，显然上述两式均不可能成立，故此时方程无解。

其余情形，即 $k_s \equiv 1(mod 4)$ $p_s \neq 3$ 和 $k_s \equiv 3(mod 4)$，则 $\varphi_5(SL(n)) = \varphi_5(p_s^{k_s}) = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2\delta(3,1)}{5}$。如果有 $Z(n) = \varphi_7(SL(n))$ 成立，则有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2\delta(3,1))$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2\delta(3,1)+5)$ 成立。显然，此时上述两式均不可能成立，由此便推出矛盾。

(ii) 若 $k_s \equiv 2,4(mod 4)$，则有 $\varphi_5(SL(n)) = \varphi_5(p_s^{k_s}) = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1)+\delta(4,2)}{5}$，如果有 $Z(n) = \varphi_5(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义，有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+\delta(4,2))$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+\delta(4,2)+5)$ 成立，显然这是一个矛盾。因为，若 $k_s \equiv 2(mod 4)$，则必有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)-1)$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+4)$ 成立，显然矛盾。如果 $k_s \equiv 4(mod 4)$，则必有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+1)$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+6)$ 成立，显然矛盾。

(5°) 若 $p_s \equiv 4(mod 5)$，分 2 种情况进行讨论。

(i) 若 $k_s \equiv 1,3(mod 4)$，则 $\varphi_5(SL(n)) = \varphi_5(p_s^{k_s}) = \dfrac{\varphi(p_s^{k_s})-3}{5} = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1)-3}{5}$。

如果有 $Z(n) = \varphi_5(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义，有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)-3)$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2)$ 成立。显然这是一个矛盾，故此时方程无解。

(ii) 若 $k_s \equiv 1,3(mod 4)$，则此时的讨论和(i)是类似的。

综上所述，定理 1 得证。

4. 结语

本文利用伪 Smarandache 函数、Smarandache LCM 函数以及广义欧拉函数的基本性质，讨论了数论函数方程 $Z(n) = \varphi_5(SL(n))$ 的可解性，证明了该方程无正整数解。在此基础上，可进一步讨论数论函数方程 $Z(n) = \varphi_p(SL(n))$ 的可解性，其中 p 是任意的奇素数。

参考文献

[1] Sandor, J. (2002) On a Dual of the Pseudo Smarandache Function. *Smarandache Notions Journal*, **13**, 18-23. https://doi.org/10.5281/ZENODO.8963

[2] Murthy, A. (2000) Some New Smarandache Sequences, Functions and Partitions. *Smarandache Notions Journal*, **11**, 179-183.

[3] Cai, T. (2002) A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (I). *Acta Arithmetica*, **103**, 313-320. https://doi.org/10.4064/aa103-4-1

[4] Cai, T.X., Fu, X.D. and Zhou, X. (2007) A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (II). *Acta Arithmetica*, **130**, 203-214. https://doi.org/10.4064/aa130-3-1

[5] Cai, T.X., Shen, Z.Y. and Hu, M.J. (2013) On the Parity of the Generalized Euler Function. *Advances in Mathematics*, **42**, 505-510.

[6] Shen, Z.Y., Cai, T.X. and Hu, M.J. (2016) On the Parity of the Generalized Euler Function (II). *Advances in Mathematics*, **45**, 509-519.

[7] Yang, S.C., Liao, Q.Y., Du, S., *et al*. (2021) The Explict Formula and Parity for Some Generalized Euler Functions. arXiv: 2112.11725. https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.11725

[8] Zhu, C. and Liao, Q.Y. (2021) A Recursion Formula for the Generalized Function $\varphi_e(n)$. arXiv: 2105.10870. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.10870

[9] 朱山山, 瞿云云, 周建华, 等. 数论函数方程$t\varphi(n)+\varphi_2(n)=S\left(SL\left(n^k\right)\right)$的正整数解[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2023, 41(2): 80-85. https://doi.org/10.16614/j.gznuj.zrb.2023.02.011

[10] 张四保. 数论函数方程$\varphi_2(n)=S\left(SL\left(n^{15,17}\right)\right)$的可解性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(4): 65-69. https://doi.org/10.13718/j.cnki.xdzk.2020.04.008

[11] 曹盼盼, 赵西卿. 广义欧拉函数方程$\varphi_2(n)=S\left(n^{28}\right)$的正整数解[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2020, 39(4): 72-76. https://doi.org/10.13876/J.cnki.ydnse.2020.04.072

[12] 朱杰. 关于方程$Z(n)=\varphi_e\left(SL(n)\right)$的全部正整数解[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川师范大学, 2020. https://doi.org/10.27347/d.cnki.gssdu.2020.001198