

含集中质量不同流向多通道旋转输流管 动力学特性分析

王毅琛, 祝羽

长安大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2024年3月29日; 录用日期: 2024年4月9日; 发布日期: 2024年6月7日

摘要

涡轮叶片工作环境极度严苛, 需要在内部设置多条冷却通道使其冷却降温。叶片在自身旋转和内部流体的共同作用下, 会引发系统共振, 因此需要对叶片的动力学行为进行研究。本文主要研究旋转叶片在内部流体作用下产生的动力学行为, 将含有叶冠和蛇形冷却通道的叶片结构简化为含端部集中质量不同流向多通道旋转输流管, 通过计算位移分量在轴向拉伸和弯曲变形的作用下产生的动能、势能以及开放系统下流体作用对系统产生的功, 代入Lagrange方程得到系统的动力学方程, 将方程无量纲化, 使其具有一般性规律。通过求解动力学方程的特征值, 计算得到系统的特征频率和阻尼频率。研究表明: 旋转输流管中流体流速方向会显著影响系统的特征轨迹和振动模态, 转速和端部集中质量会显著提高输流管的稳定性。

关键词

多通道输流管, Lagrange方程, 临界失稳流速, 稳定性, 振动模态

Dynamic Characteristics Analysis of Multi-Channel Rotary Flow Tube with Concentrated Mass and Different Flow Directions

Yichen Wang, Yu Zhu

School of Sciences, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Abstract

The working environment of turbine blades is extremely harsh, and multiple cooling channels need to be set up inside to cool them. Under the joint action of blade rotation and internal fluid, the system resonance will be triggered, so it is necessary to study the dynamic behavior of blade. This paper mainly studies the dynamic behavior of rotating blades under the action of internal fluids. The blade structure containing blade crown and serpentine cooling channels is simplified into a multi-channel rotating flow tube with concentrated mass at the end in different directions. Kinetic energy and potential energy generated by the displacement component under the action of axial stretching and bending deformation and the work generated by fluid action on the system under an open system are calculated. The Lagrange equation is substituted to obtain the kinetic equation of the system, and the equations are dimensionless, so that they have general laws. By solving the eigenvalues of the dynamic equations, the eigenfrequencies and damping frequencies of the system are calculated. The results show that the characteristic trajectory and vibration mode of the system are significantly affected by the flow velocity direction in the rotating flow tube, and the stability of the flow tube is significantly improved by the rotational speed and end mass.

Keywords

Multi-Channel Flow Pipe, Lagrange Equation, Critical Velocity of Instability, Stability, Mode of Vibration

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

燃气轮机涡轮叶片的工作环境极其严苛[1], 商用燃气轮机内部的工作温度通常可以达到 1200°C 左右, 航空燃气轮机内部温度甚至可能超过 1350°C, 为了保证叶片能在高温下保持足够的强度和稳定性, 避免因过热导致材料性能下降甚至失效, 高效的冷却系统至关重要。最常见的冷却方法是在保证强度的前提下在叶片内部设置多条冷却通道[2], 在通道中通入流体, 冷热交换使叶片冷却。在叶片工作的过程中, 冷却通道中的流体运动与叶片自身的旋转相互作用产生振动, 极易使叶片变形, 产生极大的危害。因此研究包含冷却通道的旋转叶片的振动特性对于合理设计燃气轮机结构具有重要意义。

早在 20 世纪初各个国家对叶片就展开了相关研究, 在早期的研究文献中普遍将复杂的叶片结构简化为旋转悬臂梁[3] [4]、板[5]、壳[6]系统。上述研究都是直接研究实心结构在自身旋转下对系统振动的影响, 但是都没有涉及到叶片内部冷却流体流动所带来的影响, 在之后的研究[7] [8] [9] [10] [11]发现输流管内流体也会影响到叶片的动力学行为。Bourrières [12]运用经典力学对输流管结构进行振动特性分析, 推导其振动微分方程, 但是并没有引起广泛的注意, 直到 Païdoussis [13]总结了前人的研究将输流管, 研究了悬臂输流管这一种含有非保守内流效应的系统受不同参数影响的动力学特性。最常用到的提高悬臂输流管稳定性的方法是在输流管自由端处添加的集中质量[14] [15] [16], 在叶片结构中集中质量被称之为叶冠[17]。

目前旋转输流管的研究根据旋转中心轴的不同大致可以分为两类, 第一类是旋转中心轴与输流管中轴线重合, 如: 深井石油钻柱; 第二类旋转中心轴与输流管中轴线垂直, 如: 燃气轮机涡轮叶片。目前第二类是旋转输流管的相关研究还比较少, 杨佳丽[18]详细总结了在旋转情况下使用铁木辛柯梁理论对输流管的振动特性分析。Yoon [19]研究了变转速情况下输流管的力学行为变化。Zhang [20]基于 Lagrange 原理和假设模态法建立了旋转输流管的动力学模型研究了在不同参数下旋转对临界流速的影响。

综上, 叶片在内部流体作用下会发生在特定流速下产生颤振失稳和屈曲失稳现象。为了使理论计算模型更为接近现实叶片的结构 Zhang [20]研究了在含有双冷却通道下叶片的不同的动力学行为, 但是很显然仍然不足以描述含有叶冠内部具有复杂的蛇形冷却通道的涡轮叶片结构。本文在[20]的基础上, 建立了含有集中质量相邻冷却通道流体流动方向不同的旋转输流管动力学方程, 使用能量法推导含有多条不同流动方向冷却通道的旋转输流管运动学方程, 探究了在不同的系统参数组合下叶片振动特性变化规律。

2. 模型描述与动力学方程建立

本文将燃气轮机涡轮叶片简化为如图 1 所示的三通道旋转输流管模型, 其中轮毂半径为 r 叶片高度为 h , 宽度为 b , 长度为 L , 通道的半径为 $r_i (i = 1, 2, 3)$, 通道与输流管中轴线的距离为 $d_i (i = 1, 2, 3)$, 单位长度固体的质量为 m , 单位长度流体的质量为 $M_i (i = 1, 2, 3)$, 端部集中质量为 T_m , 输流管的转动速度为 Ω , 输流管内流体任意一点相对于管道的流动速度为 $U_i (i = 1, 2, 3)$ 。为了简化析过程, 使用欧拉梁的基本假设: 1) 在梁发生弯曲变形时, 垂直于梁中性轴的任一横截面在变形后仍然保持平面, 并且该平面始终与中性轴保持垂直; 2) 欧拉梁理论假设梁在受到弯矩作用时, 只发生弯曲变形, 而不考虑剪切变形的影响。

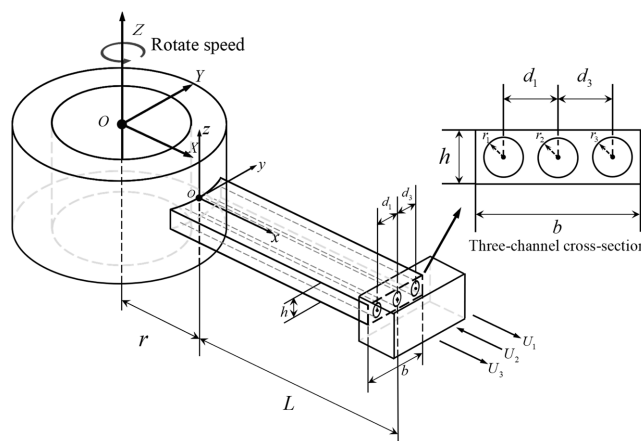


Figure 1. Rotating flow pipe with concentrated mass in multi channel flow channels
图 1. 含集中质量多通道输流通道旋转输流管模型

输流管的变形势能和旋转产生的轴向伸缩势能为:

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L (EA_p w_{1,x}^2 + IEw_{2,xx}^2) dx \tag{1}$$

$$V_s = \frac{\Omega^2}{4} \int_0^L w_{2,x}^2 [m(L^2 - x^2) + 2mr(L - x) + 2T_m(r + L)] dx \tag{2}$$

输流管和流体的动能:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^L m \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p dx + \frac{1}{2} T_m (\mathbf{v}_p |_{x=L}) \tag{3}$$

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^L M_1 \mathbf{v}_{f1} \cdot \mathbf{v}_{f1} + M_2 \mathbf{v}_{f2} \cdot \mathbf{v}_{f2} + M_3 \mathbf{v}_{f3} \cdot \mathbf{v}_{f3} dx \quad (4)$$

非保守系统切向跟随力做功:

$$W_i = \frac{1}{2} M_i U_i^2 \int_0^L w_{2,x}^2 dx - M_i U_i (U_i w_{2,x} + \dot{w}_2) w_2 \Big|_{x=L} \quad (5)$$

系统下的旋转输流管的 Lagrange 函数为:

$$L = T_p + T_f - V_p - V_s + W_1 + W_2 + W_3 \quad (6)$$

$$x^* = \frac{x}{L}, t^* = \sqrt{\frac{EI}{m + \sum_{i=1}^3 M_i}} \frac{t}{L^2}, w_1^* = \frac{w_1}{L}, w_2^* = \frac{w_2}{L}, r^* = \frac{r}{L}, d_i^* = \frac{d_i}{L} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

$$m^* = \frac{m}{m + \sum_{i=1}^3 M_i}, M_i^* = \frac{M_i}{m + \sum_{i=1}^3 M_i}, T_m^* = \frac{T_m}{\left(m + \sum_{i=1}^3 M_i\right) L}, U_i^* = U_i L \sqrt{\frac{M_i}{EI}}, \Omega^* = \Omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}$$

将公式(6)中计算得到的 Lagrange 函数代入到 Lagrange 方程中并将其中所有的元素进行无量纲化处理, 为了方便书写, 省略所有无量纲量的星号*, 得到如下系统矩阵形式的动力学方程。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{M}^{12} \\ \mathbf{M}^{21} & \mathbf{M}^{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^{12} \\ \mathbf{G}^{21} & \mathbf{G}^{22} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

矩阵方程中各元素的表达如:

$$M_{ij}^{11} = \int_0^L \phi_{1i}(x) \phi_{1j}(x) dx + T_m \phi_{1i}(L) \phi_{1j}(L) \quad (9)$$

$$M_{ij}^{12} = -\left(\sum_{i=1}^3 M_i d_i\right) \left(\int_0^L \phi_{1i}(x) \phi_{2j}'(x) dx\right) \quad (10)$$

$$M_{ij}^{21} = -\left(\sum_{i=1}^3 M_i d_i\right) \left(\int_0^L \phi_{1i}(x) \phi_{2j}'(x) dx\right) \quad (11)$$

$$M_{ij}^{22} = \int_0^L \phi_{2i}(x) \phi_{2j}(x) dx + \left(\sum_{i=1}^3 M_i d_i^2\right) \left(\int_0^L \phi_{2i}'(x) \phi_{2j}'(x) dx\right) + T_m \phi_{2i}(L) \phi_{2j}(L) \quad (12)$$

$$G_{ij}^{22} = 2(M_1 U_1 - M_2 U_2 + M_3 U_3) \left(\int_0^L \phi_{2i}(x) \phi_{2j}'(x) dx\right) \quad (13)$$

$$G_{ij}^{12} = -2\Omega \left(\int_0^L \phi_{1i}(x) \phi_{2j}(x) dx\right) - 2\Omega T_m \phi_{1i}(L) \phi_{2j}(L) \quad (14)$$

$$G_{ij}^{21} = -G_{ij}^{12} \quad (15)$$

$$K_{ij}^{11} = A_p \left(\int_0^L \phi_{1i}'(x) \phi_{1j}'(x) dx\right) - \Omega^2 \left(\int_0^L \phi_{1i}(x) \phi_{1j}(x) dx\right) - \Omega^2 T_m \phi_{1i}(L) \phi_{1j}(L) \quad (16)$$

$$K_{ij}^{12} = -MU\Omega \int_0^L \phi_{1i}(x) \phi_{2j}'(x) dx \quad (17)$$

$$K_{ij}^{21} = K_{ij}^{12} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{22} = & -\Omega^2 \left(\int_0^L \phi_{2i}(x) \phi_{2j}(x) dx\right) + \int_0^L \phi_{2i}''(x) \cdot \phi_{2j}''(x) dx - \sum_{i=1}^3 \left((-d_1 \Omega + U_1)^2 + (d_2 \Omega + U_2)^2 \right. \\ & \left. + (-d_3 \Omega + U_3)^2 \right) \left(\int_0^L \phi_{2i}'(x) \phi_{2j}'(x) dx\right) + \sum_{i=1}^3 (M_1 U_1^2 - M_2 U_2^2 + M_3 U_3^2) \phi_{2i}(L) \phi_{2j}(L) \\ & + \frac{1}{2} \Omega^2 \left(\int_0^L ((L-x)(L+2r+x)m) \phi_{2i}'(x) \phi_{2j}'(x) dx\right) - \Omega^2 T_m \phi_{2i}(L) \phi_{2j}(L) \end{aligned} \quad (19)$$

$$P_{ij}^1 = \Omega^2 \left(\sum_{i=1}^3 M_i + m \right) \left(\int_0^L (r+x) \phi_i dx \right) \tag{20}$$

$$P_{ij}^2 = \left(M_1 (U_1 - d_1 \Omega) + M_2 (U_2 + d_2 \Omega) + M_3 (U_3 - d_3 \Omega) \right) \left(\int_0^L (r+x) \phi_{2i}'(x) - \phi_{2i}(x) dx \right) \tag{21}$$

求解此矩阵方程的特征值问题, 计算得到含有阻尼项的前三阶特征频率。在流速不断增加的过程中, 系统某阶固有频率从正值变为 0 时输流管出现屈曲失稳现象, 此时的流速就是屈曲失稳流速; 当系统某阶阻尼频率从正值变为负值时输流管出现颤振失稳现象, 此时的流速就是颤振失稳流速。输流管发生屈曲失稳或者颤振失稳的最小流速, 称为该输流管系统的临界流速。

为验证本文所用的方法的可行性, 将含集中质量多通道输流管模型简化为单通道输流管数, 文献[14]中自由端含集中质量单通道输流管前两阶固有频率和阻尼与本文使用方法计算的结果作比较, 对比结果如表 1 所示, 两种方法计算得到结果基本吻合。

Table 1. Comparison of the natural frequencies of cantilever fluid-conveying pipe system with an end-mass from the present study and the reference ($M = 0.1, T_m = 0.3$)

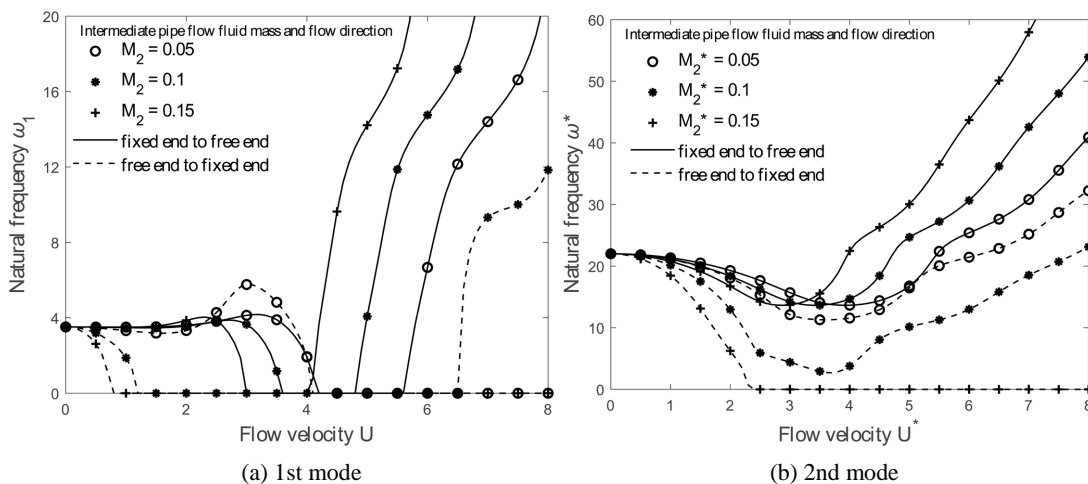
表 1. 自由端含集中质量悬臂输流管系统固有频率本文计算值与文献对比($M = 0.1, T_m = 0.3$)

U	Natural frequency	This paper	Ref. [14]
0	First	2.36	2.36
	Second	17.59	17.59
2	First	2.71 + 0.67 j	2.71 + 0.66 j
	Second	16.48 + 0.08 j	16.48 + 0.08 j

3. 多通道输流管动力学特性分析

在工程实际应用背景下, 理论模型采用多条流动方向不同的输流管更具备参考价值, 因此将旋转叶片简化为三冷却通道的旋转输流管 r_1, r_2, r_3 设置为相同大小, 使输流管的截面仍然保持为中心对称结构。在固定端绝对流速为 U^* 的情况下, 使中心位置输流管流体流动方向与两侧的相反。

图 2 给出了不同中间管道流动方向及流速对输流管前三阶固有频率的影响($M^* = 0.2, \Omega^* = 0$)。一阶模态均会发生屈曲, 在中间管道流体从自由端流向固定端的情况下, $U^* = 1.5$ 二阶模态发生屈曲, 三阶模态均会发生屈曲, 但是三阶屈曲临界流速远小于一阶屈曲临界流速。



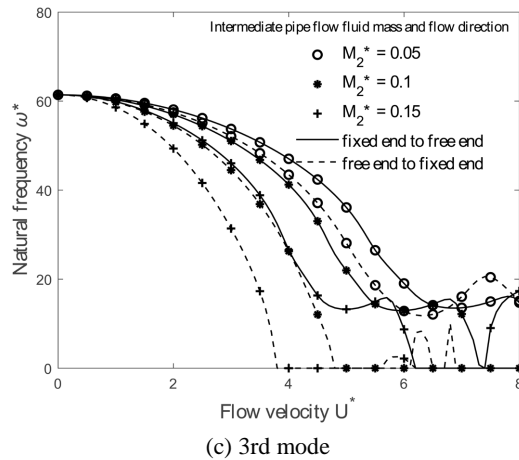


Figure 2. The first three natural frequencies of a single channel flow tube with different flow directions vary with the flow velocity
图 2. 不同中间管道流动方向及流速对三通道输流管前三阶固有频率随流体流速变化曲线

为了揭示不同方向流体流动对三通道输流管稳定性的影响，图 3 绘制了不同中间管道流速比下三通道输流管特征轨迹变化图，得到如下规律：

如图 3(a)所示，转速对三通道流体均由固定端流向自由端输流通道特征轨迹影响较小。

如图 3(b)所示，当三条管道流速比值接近 1:-1.9:1 时，三条轨迹曲线都在阻尼为 0 的附近波动，这是由于单位时间从自由端流出的流体量与固定端流出的流体量接近的时候，输流管切向跟随力所做的功会趋近于 0，系统的阻尼也因此趋近于 0，此时特征轨迹曲线与实轴基本重合；中间管道流速比值接近 1:-0.1:1 时，曲线无限接近于固定端到自由端输流通道特征轨迹影响。系统的一阶固有频率经历一个随流速比值先减小再增大再减小的过程，起初二阶颤振流速小于一阶屈曲流速，但是颤振减小速度大于屈曲减小速度，所以系统临界流速会经历一个屈曲 - 颤振 - 屈曲的过程。

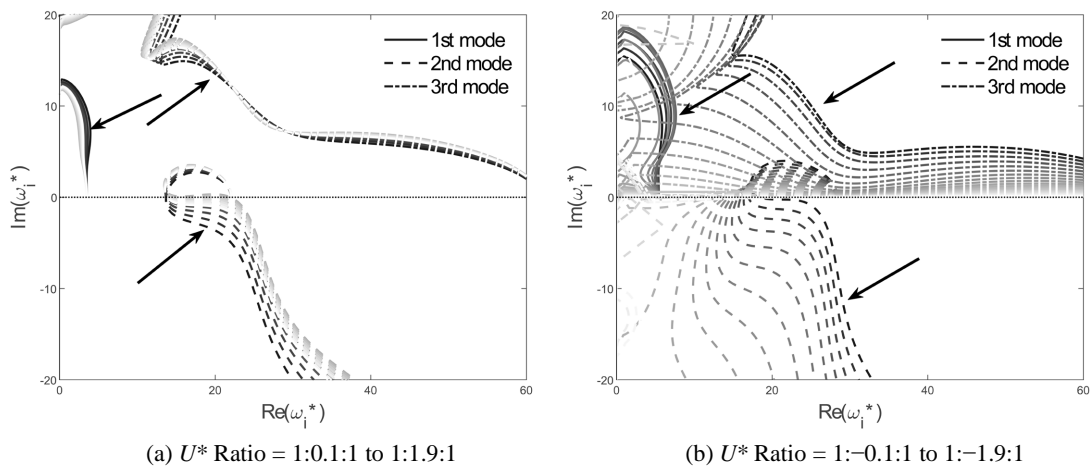


Figure 3. Trend diagram of influence of different velocity ratios on characteristic trajectories
图 3. 不同流速比对特征轨迹影响趋势图

如图 4，图 5 系统失稳流速随着转速的增加而增加，更加趋于稳定。当三条通道速度比值为 1:1:1 时 (图 4，图 5(a))在单位面积流体质量较小时系统主要以二阶颤振失稳为主，在转速增加的过程中，颤振临界流速提升速度大于屈曲临界提升速度，系统的失稳方式由颤振变化为屈曲，在转速继续增加的过程中，

系统会发生二三阶的模态转迁现象, 当单位流体质量增加的过程中, 发生转迁的转速不断增加; 在单位面积流体质量较大时系统主要以屈曲失稳为主, 失稳方式不再发生变化。

当三条通道速度比值为 1:-1:1 (图 4, 图 5(b)) 由于中间管道的影响, 不发生模态转迁; 第三阶频率不再持续稳定而会发生屈曲失稳, 但是失稳流速小于第一阶屈曲临界流速, 所以不做讨论; 在单位面积流体质量较小时系统的一阶固有频率经历先减小在增加的过程, 在转速增加的过程中一阶固有频率初次下降的过程中不再降为 0, 发生屈曲失稳的流速发生突变, 系统临界失稳流速由屈曲失稳变为颤振失稳; 单位面积流体质量较大时系统主要以屈曲失稳为主, 屈曲失稳流速不发生突变, 失稳方式不发生变化。

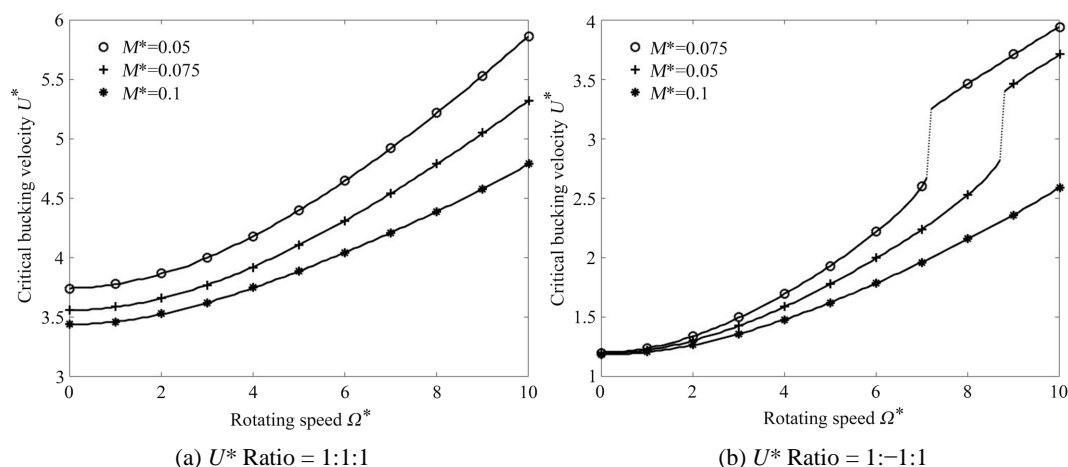


Figure 4. Influence of rotational speed on critical buckling velocity of three-channel pipe

图 4. 转速对三通道输流管屈曲临界流速影响

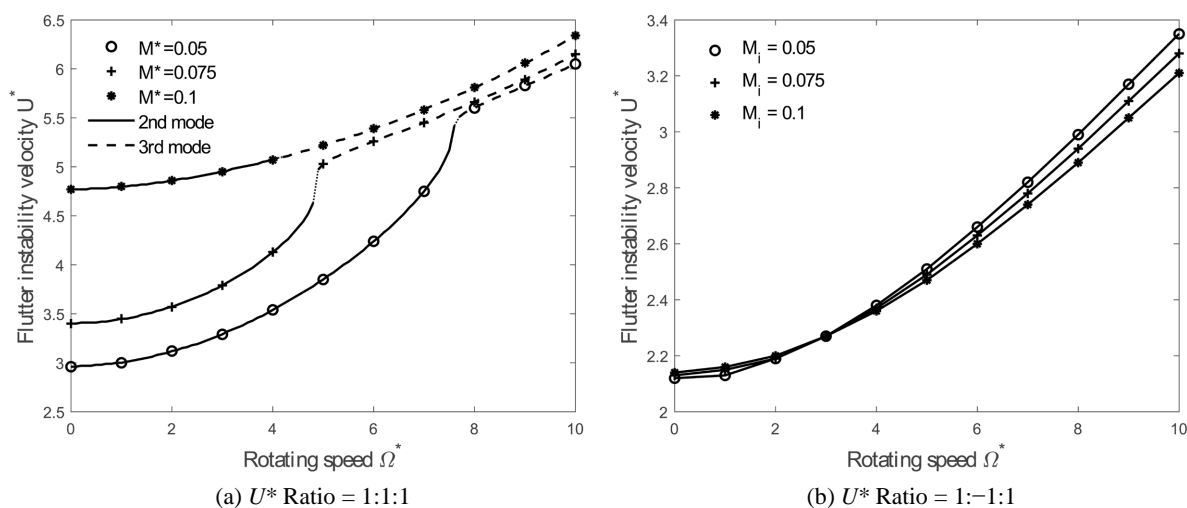


Figure 5. Influence of rotational speed on critical flutter velocity of three-channel pipe

图 5. 转速对三通道输流管颤振临界流速影响

如图 6 所示为不同集中质量大小对特征轨迹影响趋势图, 第二阶模态则显示出随着端部质量增大, 其颤振失稳现象更不容易发生, 第二阶模态的临界流速随着端部质量增大而增大, 这是由于端部集中质量强化了应力刚化效应, 增强了结构的刚度, 从而提高了整体稳定性。随着端部集中质量的改变, 原本的振动模态阶数可能会发生变化, 即发生模态转迁现象[15]。

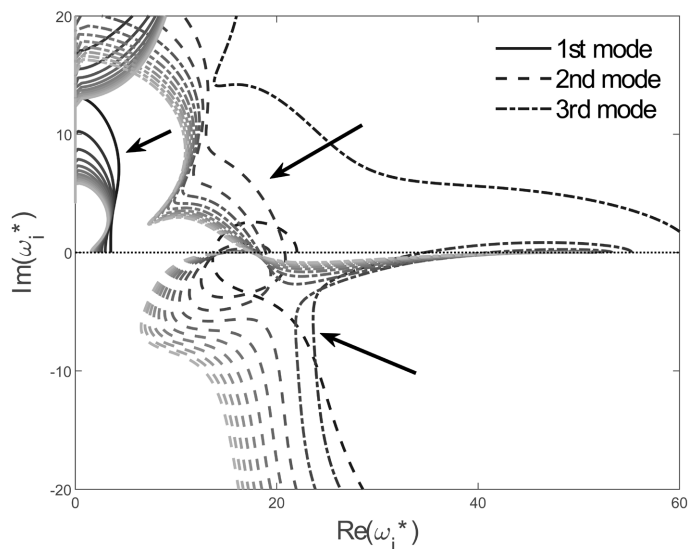


Figure 6. Trend diagram of influence of different concentration masses on characteristic trajectories
图 6. 不同集中质量大小对特征轨迹影响趋势图

图 7 揭示了三输流管道叶片不同中间管道流动方向对前三阶复模态节点位移的影响。当流速比为 1:1:1 时, 由于相位随时间逐渐变化, (图 7(a))能观察到复模态系统三阶模态出现明显的节点位移现象, 当流速比为 1:-1:1 时(图 7(b))由于中间通道的影响, 系统相位影响对模态影响较小, 未能观察到明显的节点位移。这是由于复模态分析下相位是由阻尼矩阵 G 产生, 单位时间内流出流体质量越大, 相位移动越明显, 中间管道与两边管道流向相反时, 单位时间内流出流入流体相抵消, 矩阵 G 影响降低, 相位不再明显。

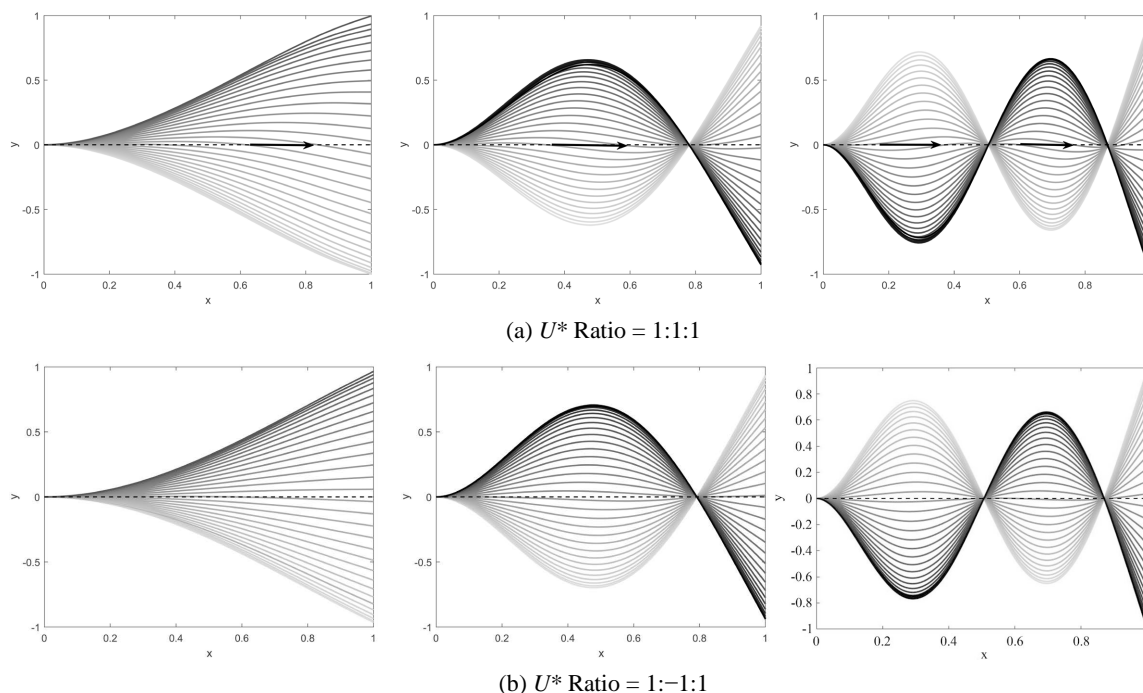


Figure 7. The first three modal responses of the flow tube at different velocity ratios
图 7. 不同流速比下输流管前三阶模态响应

图 8 呈现了集中质量变化对输流管前两阶模态响应中复模态节点位移的影响。当 $T_m = 0$ 时, 在特定模态下的在自由端纵向位移相对较大, 管道更容易激发并呈现出显著的模态振动响应, 其动态稳定性相对较弱。当 $T_m = 0.5$ 时系统的自由端纵向位移相对较小, 在同样的外部激励条件下, 管道的模态响应被抑制, 不易产生明显的振动。

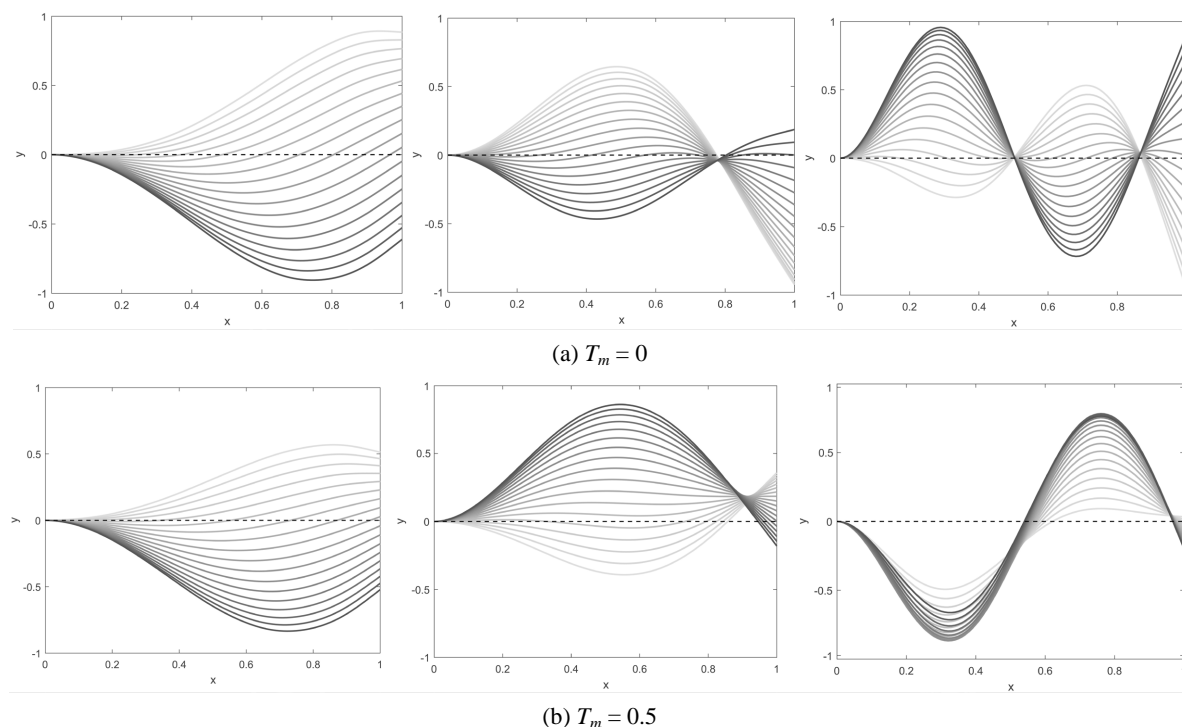


Figure 8. The first three modal responses of the flow tube under different concentrated masses ($U_i^* = 3$)
图 8. 不同集中质量下输流管前三阶模态响应($U_i^* = 3$)

4. 结论

本文将燃气轮机涡轮叶片简化为含有集中质量多通道不同流向的旋转输流管系统, 分别计算管道和内部流体的动能和势能以及外力功, 带入到 Lagrange 方程得到系统的动力学方程矩阵, 计算矩阵方程的特征值求解前三阶固有频率和阻尼频率, 得到内流作用和自身旋转对系统的动力学特性影响如下:

1) 当单位时间在自由端流出和流入的流体质量相同时, 系统阻尼始终为 0, 不再发生颤振失稳。输流管内部流体流动方向和自身转动都会显著影响系统的临界流速和模态转迁。在单位面积流体质量较小时, 系统临界失稳流速以颤振失稳为主, 随着转速增加失稳方式会发生改变; 在单位面积流体质量较大时, 系统临界失稳流速以屈曲失稳为主。

2) 由于转动和集中质量使输流管在轴向产生了拉伸作用, 使叶片在一定范围内具有明显的应力刚化效应, 可以有效提高系统的稳定性。

3) 单位时间内流出系统的; 流体质量会影响前三阶复模态节点位移出现的速度, 不同集中质量大小会显著影响输流管在自由端的纵向位移长度。

参考文献

- [1] 蒋洪德, 任静, 李雪英, 等. 重型燃气轮机现状与发展趋势[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(29): 5096-5102.
- [2] 张效伟, 朱惠人. 大型燃气涡轮叶片冷却技术[J]. 热能动力工程, 2008(1): 1-6+103.

- [3] Sutherland, R. (1950) Bending Vibration of a Rotating Blade Vibrating in the Plane of Rotation. *Journal of Applied Mechanics*, **16**, 389-394. <https://doi.org/10.1115/1.4010015>
- [4] Liner, H.S. (1954) The Natural Frequencies and Modes of Vibration of a Rotating Beam. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, **58**, 652-654. <https://doi.org/10.1017/S036839310009965X>
- [5] Carnegie, W. (1959) Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods. *Journal of Mechanical Engineering Sciences*, **1**, 235-240. https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1959_001_028_02
- [6] Porat, I. and Niv, M. (1971) Vibration of a Rotating Shaft by the "Timoshenko Beam" Theory. *Israel Journal of Technology*, **9**, 535-546.
- [7] 冯振宇, 王忠民, 赵凤群. 考虑转动惯量时输流管道动力特性分析的有限差分法[J]. 西安公路交通大学学报, 1998(2): 41-45.
- [8] Mciver, D.B. (1973) Hamilton's Principle for Systems of Changing Mass. *Journal of Engineering Mathematics*, **7**, 249-261. <https://doi.org/10.1007/BF01535286>
- [9] Guran, A. and Plaut, R.H. (1993) An Adjoint Variational Principle for Fluid Conveying Pipes. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **73**, T496-T497.
- [10] Dimarogonas, D.D. (2000) Linear In-Plane and Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever. *Journal of Fluids and Structures*, **14**, 1-24.
- [11] 倪樵, 黄玉盈, 陈贻平. 微分求积法分析具有弹性支承输液管的临界流速[J]. 计算力学学报, 2001, 18(2): 146-149.
- [12] Bourrières, F.J. (1939) Sur un phénomène d'oscillation autoentretenue en mécanique des fluides reels. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, **147**, 57-65.
- [13] Païdoussis, M.P. and Issid, N.T. (1974) Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid. *Journal of Sound and Vibration*, **33**, 267-294. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80002-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80002-7)
- [14] 赵桂欣, 孟帅, 车驰东, 等. 解释自由端含集中质量悬臂输流管固有频率计算悖论[J]. 振动与冲击, 2023, 42(7): 18-24.
- [15] 易浩然, 周坤, 代胡亮, 等. 含集中质量悬臂输流管的稳定性与模态演化特性研究[J]. 力学学报, 2020(6): 52.
- [16] El Najjar, J. and Daneshmand, F. (2020) Stability of Horizontal and Vertical Pipes Conveying Fluid under the Effects of Additional Point Masses and Springs. *Ocean Engineering*, **206**, Article ID: 106943. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.106943>
- [17] 龙伦, 袁巍, 成晓鸣, 等. 航空发动机带冠涡轮叶片振动特性分析及验证[J]. 机械强度, 2021, 43(4): 960-965.
- [18] 杨佳丽, 杨虹, 李伟. 旋转 Timoshenko 输流管道的固有频率和稳定性分析[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(2): 58-65.
- [19] Yoon, H.I. and Son, I.S. (2007) Dynamic Response of Rotating Flexible Cantilever Pipe Conveying Fluid with Tip Mass. *International Journal of Mechanical Sciences*, **49**, 878-887. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.11.006>
- [20] 张博, 郑昊楷, 孙东生, 等. 双通道旋转输流管临界流速和振动模态分析[J]. 力学学报, 2023, 55(1): 182-191.