Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(7), 3324-3331**
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137318

Hans汉斯

一类具有对数非线性项的*p*-双调和抛物方程解的衰退

赵雅鑫*，吴秀兰

长春理工大学数学与统计学院，吉林 长春

收稿日期：2024年6月17日；录用日期：2024年7月11日；发布日期：2024年7月19日

摘 要

文章研究了具有*p*-双调和算子和对数非线性项的抛物方程的初边值问题。在改进的位势井理论框架下，利用微分不等式技巧得到了适当条件下弱解的衰退估计，推广和改进了已有结果。

关键词

***p*-双调和抛物方程，对数非线性项，衰退**

Decay of Solutions for a *p*-Biharmonic Parabolic Equation with Logarithmic Nonlinearity

Yaxin Zhao, Xiulan Wu

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: Jun. 17th, 2024; accepted: Jul. 11th, 2024; published: Jul. 19th, 2024

Abstract

In this paper, the initial-boundary value problem for a parabolic equation with *p*-biharmonic operator and logarithmic nonlinearity is studied. Under the improved framework of potential well theory, the decay estimation of weak solutions under appropriate conditions was obtained by differential inequality techniques, which generalizes and improves existing results.

*通讯作者。

文章引用: 赵雅鑫, 吴秀兰. 一类具有对数非线性项的 *p*-双调和抛物方程解的衰退[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3324-3331. DOI: 10.12677/aam.2024.137318

Keywords

***p*-Biharmonic Parabolic Equation, Logarithmic Nonlinearity, Decay**

1. 引言

本文考虑如下具有对数分线性项的 p-双调和抛物方程：

$$\begin{cases} u_t + \Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right) + \Delta u_t = |u|^{q-2}u\ln|u|, & x\in\Omega, t>0; \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0; \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N\geq 1)$ 是具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，υ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量，$u_0(x)\in W_0^{2,p}(\Omega)$，$\Delta_p^2 u = \Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right)$ 为 p-双调和算子，当 $p=2$ 时，称为双调和算子，指数 p 和 q 满足：

$$2\leq p\leq q< p\left(1+\frac{4}{N}\right). \tag{2}$$

Payne 和 Sattinger [1]首次构建位势井理论的框架，研究了如下非线性波动方程的初边值问题。

$$u_{tt} = \Delta u + f(u),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty),$$

得到了如果初值落入井内集合，则整体解存在；如果初值落入井外集合，则整体解不存在。此后，位势井法成为研究问题弱解整体存在性以及衰退和爆破性质的重要方法[2] [3]。Liu [4]改进了先前的研究结果，提出了一种新的方法，即所谓的位势井族。对于源项 $f(u)=|u|^{p-1}u$ 的情形，Liu 得到了初值在亚次临界初始能量时，弱解不会位于真空隔离区域的结果。位势井族的方法被众多学者成功应用到一些偏微分方程弱解的研究当中[5]-[7]。

四阶微分方程是在非线性弹性地基上研究弹性梁挠度问题时产生的，现实生活中很多重要现象都可以用四阶偏微分方程来描述[8] [9]，将四阶微分方程推广到更复杂的情形，即 p-双调和方程，许多学者考虑了这类方程，可参考文献[10]-[12]。其中，Liu 和 Fang [10]研究了问题(1)，他们结合 Galerkin 方法、改进的对数 Sobolev 不等式及位势井理论，得到了在 $\max\{1,2N/(N+4)\}<p\leq q<p(1+4/N)$ 的情形下弱解的整体存在性；利用微分不等式技巧得到了 $1<p\leq q\leq 2$ 时弱解在无穷远处爆破，并利用凹引理得到了 $\max\{1,2N/(N+4)\}<p\leq q$ 、 $2<q<p(1+4/N)$ 时，弱解在有限时间爆破的结果；此外在 $\max\{1,2N/(N+4)\}<p<q<2$ 的情形下，给出了弱解的熄灭现象，并得到了衰退率的估计。但对问题(1)在 $2\leq p\leq q<p(1+4/N)$ 时弱解的衰退未作分析。本文在文献[10]的基础上，给出了弱解在 $2\leq p\leq q<p(1+4/N)$ 情形下的衰退估计，相较于一般的位势井理论，在研究弱解衰退性质时，对于 $p=2$ 和 $p>2$ 需采用不同的处理方法，本文则利用位势井族及微分不等式技巧，研究了 $p\geq 2$ 的更一般的结果，从而完善了[10]的结果。

2. 准备工作

在本文中，对任意 $u\in L^p(\Omega)$，$\|u\|_p=\left(\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 表示 u 的 $L^p(\Omega)$ 范数。由于 $p\geq 2$，则有下列事实

成立

$$p\left(1+\frac{4}{N}\right)<\begin{cases}\dfrac{Np}{N-2p}, & N>2p,\\ +\infty, & N\le 2p.\end{cases}$$

首先定义与之相关的泛函和集合，对任意 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$，令

$$J(u)=\frac{1}{p}\|\Delta u\|_p^p-\frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q\ln|u|\mathrm{d}x+\frac{1}{q^2}\|u\|_q^q, \tag{3}$$

$$I(u)=\|\Delta u\|_p^p-\int_\Omega |u|^q\ln|u|\mathrm{d}x, \tag{4}$$

则有

$$J(u)=\frac{1}{q}I(u)+\frac{q-p}{pq}\|\Delta u\|_p^p+\frac{1}{q^2}\|u\|_q^q, \tag{5}$$

定义 Nehari 流形 $\mathcal{N}=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega)\setminus\{0\},I(u)=0\right\}$，井深 $d=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}}J(u)$。定义位势井 W 和井外集合 V 如下：

$$W=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega)\mid J(u)<d,I(u)>0\right\}\cup\{0\},$$

$$V=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega)\mid J(u)<d,I(u)<0\right\},$$

将上述单个位势井推广到位势井族，对于任意 $\delta>0$，定义修正的泛函和 Nehari 流形为

$$I_\delta(u)=\delta\|\Delta u\|_p^p-\int_\Omega |u|^q\ln|u|\mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$\mathcal{N}_\delta=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega)\setminus\{0\},I_\delta(u)=0\right\},$$

相应的势井集合为

$$W_\delta=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega)\mid J(u)<d(\delta),I_\delta(u)>0\right\}\cup\{0\},$$

$$V=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega)\mid J(u)<d(\delta),I_\delta(u)<0\right\},$$

其中井深 $d(\delta)=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\delta}J(u)$。

接下来，给出以下几个与 $I_\delta(u)$ 性质相关的引理。

引理 2.1 令 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$，p 和 q 满足式(2)，对于任意的 $0<\alpha<p(1+4/N)$，如果 $I_\delta(u)=0$，那么有 $\|\Delta u\|_p>r_\alpha(\delta)$，其中 $r_\alpha(\delta)=\left(\delta\alpha/B_\alpha^{\alpha+q}\right)^{1/(q+\alpha-p)}$，$B_\alpha$ 是 $W_0^{2,p}(\Omega)\circlearrowleft L^{q+\alpha}(\Omega)$ 的最优嵌入常数。

证明 通过式(6)和以下事实：

$$\ln|u(x)|<\frac{|u(x)|^\alpha}{\alpha},\quad \forall\alpha>0,$$

有：

$$\begin{aligned}I_\delta(u)&=\delta\|\Delta u\|_p^p-\int_\Omega |u|^q\ln|u|\mathrm{d}x\\&>\delta\|\Delta u\|_p^p-\frac{1}{\alpha}\int_\Omega |u|^{q+\alpha}\mathrm{d}x\\&>\left(\delta-\frac{B_\alpha^{\alpha+q}}{\alpha}\|\Delta u\|_p^{q+\alpha-p}\right)\|\Delta u\|_p^p,\end{aligned}$$

其中 B_α 是 $W_0^{2,p}(\Omega)\circlearrowleft L^{q+\alpha}(\Omega)$ 的最优嵌入常数。如果 $I_\delta(u)=0$，由上式可直接得出 $\|\Delta u\|_p^p>\left(\delta\alpha/B_\alpha^{\alpha+q}\right)^{1/(q+\alpha-p)}=r_\alpha(\delta)$。

引理 2.2 令

$$r_*(\delta)=\sup_{\alpha\in\left(0,p\left(1+\frac{4}{N}\right)-q\right]}r_\alpha(\delta),\quad r^*(\delta)=\sup_{\alpha\in\left(0,p\left(1+\frac{4}{N}\right)-q\right]}\sigma_\alpha(\delta),$$

其中 $\sigma_\alpha(\delta)=\left(\delta\alpha/B_{pq}^{\alpha+q}\right)^{1/(q+\alpha-p)}|\Omega|^{\alpha/q(q+\alpha-p)}$，$B_{pq}$ 是 $W_0^{2,p}(\Omega)\circlearrowleft L^q(\Omega)$ 的最优嵌入常数。那么 $r_*(\delta)$ 存在且满足 $0<r_*(\delta)\le r^*(\delta)<+\infty$。

证明 由引理 2.1，我们可以推断出如果 $r_*(\delta)$ 存在，那么 $r_*(\delta)>0$。根据 Hölder 不等式，有：

$$\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x\le|\Omega|^{\frac{\alpha}{q+\alpha}}\left(\int_\Omega|u|^{q+\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{q+\alpha}},$$

结合 $W_0^{2,p}(\Omega)\circlearrowleft L^{q+\alpha}(\Omega)$ 和 $W_0^{2,p}(\Omega)\circlearrowleft L^q(\Omega)$，我们可以获得

$$\frac{1}{B_\alpha}=\inf_{u\in X_0}\frac{\|\Delta u\|_p}{\|u\|_{q+\alpha}}\le|\Omega|^{\frac{\alpha}{q(q+\alpha)}}\inf_{u\in X_0}\frac{\|\Delta u\|_p}{\|u\|_q}=\frac{1}{B_{pq}}|\Omega|^{\frac{\alpha}{q(q+\alpha)}},$$

因此，

$$r_\alpha(\delta)=\left(\frac{\delta\alpha}{B_\alpha^{\alpha+q}}\right)^{\frac{1}{q+\alpha-p}}\le\sigma_\alpha(\delta),$$

即 $r_*(\delta)\le r^*(\delta)$。此外，由于 $\sigma_\alpha(\delta)$ 在 $\left[0,p(1+4/N)-q\right]$ 的连续性可得 $r^*(\delta)$ 存在且

$$r^*(\delta)=\sup_{\alpha\in\left(0,p\left(1+\frac{4}{N}\right)-q\right]}\sigma_\alpha(\delta)\le\max_{\alpha\in\left[0,p\left(1+\frac{4}{N}\right)-q\right]}\sigma_\alpha(\delta)<+\infty,$$

通过上述讨论可得引理得证。

结合引理 2.1 和引理 2.2 可得如下推论：

推论 2.1 令 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$，p 和 q 满足式(2)，如果 $I_\delta(u)=0$，那么有 $\|\Delta u\|_p>r_*(\delta)$。

引理 2.3 令 $u\in\mathcal{N}_\delta$，p 和 q 满足式(2)，那么 $d(\delta)$ 满足以下性质：

1) 取 $0<\delta\le q/p$ 时，$d(\delta)>(1/p-\delta/q)r_*^p(\delta)$；

2) $\lim\limits_{\delta\to0^+}d(\delta)>0$；$\lim\limits_{\delta\to+\infty}d(\delta)=-\infty$；

3) 在 $0<\delta\le1$ 时，$d(\delta)$ 是一个递增函数，在 $1<\delta\le q/p$ 时，$d(\delta)$ 是一个递减函数，也即是，$d(\delta)$ 在 $\delta=1$ 时取得最大值 d。

证明 (1)结合 $u\in\mathcal{N}_\delta$ 和推论 2.1 得 $\|\Delta u\|_p>r_*(\delta)$，由 $J(u)$ 和 $I_\delta(u)$ 定义，可得：

$$J(u)=\left(\frac{1}{p}-\frac{\delta}{q}\right)\|\Delta u\|_p^p+\frac{1}{q^2}\|u\|_q^q,\tag{7}$$

因此，根据 $d(\delta)$ 的定义，可知(1)成立。

(2) 根据(1)的结论直接可得 $\lim\limits_{\delta\to0^+}d(\delta)>0$；此外，由式(7)有 $\lim\limits_{\delta\to+\infty}J(u)=-\infty$，再由 $d(\delta)$ 的定义可得 $\lim\limits_{\delta\to+\infty}d(\delta)=-\infty$ 成立。

(3) 为了证明 $d(\delta)$ 的单调性，我们只需要证明对于任意的 $0<\delta'<\delta''<1$ 或 $0<\delta'<\delta''<q/p$ 且对于任

意的 $u\in\mathcal{N}_{\delta''}$ 存在一个 $v\in\mathcal{N}_{\delta'}$ 和一个常数 $\varepsilon(\delta',\delta'')>0$ 使得 $J(v)<J(u)-\varepsilon(\delta',\delta'')$。事实上，对于所有的 u，我们定义 $\lambda=\lambda(\delta)$ 满足

$$\delta\|\Delta u\|_p^p=\lambda^{q-p}\left(\|u\|_q^q\ln|\lambda|+\int_\Omega|u|^q\ln|u|\mathrm{d}x\right),$$

那么 $I_\delta(\lambda(\delta)u)=0$，特别地，对于任意的 $u\in\mathcal{N}_{\delta''}$，有 $\lambda(\delta'')=1$ 使得 $I_{\delta''}(\lambda(\delta'')u)=0$。另一方面，我们定义

$$\varphi(\lambda)=\lambda^{q-p}\left(\|u\|_q^q\ln|\lambda|+\int_\Omega|u|^q\ln|u|\mathrm{d}x\right),$$

那么可以得到 $\lambda(\delta)=\varphi^{-1}\left(\delta\|\Delta u\|_p^p\right)$，因此，由 $\varphi(\lambda)$ 单调递增，可推断出 $\lambda(\delta)$ 关于 δ 单调递增。令 $g(\lambda)=J(\lambda u)$，可得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}g(\lambda)&=\lambda^{p-1}\left[\|\Delta u\|_p^p-\lambda^{q-p}\left(\|u\|_q^q\ln|\lambda|+\int_\Omega|u|^q\ln|u|\mathrm{d}x\right)\right]\\&=\frac{1}{\lambda}\left[(1-\delta)\|\lambda\Delta u\|_p^p+I_\delta(\lambda u)\right]\\&=\lambda^{p-1}(1-\delta)\|\Delta u\|_p^p.\end{aligned}$$

取 $v=\lambda(\delta')u$，那么 $v\in\mathcal{N}_{\delta'}$。对于 $0<\delta'<\delta''<1$ 的情况，由推论 2.1 可得：

$$\begin{aligned}J(u)-J(v)&=g(1)-g(\lambda(\delta'))\\&=\int_{\lambda(\delta')}^1\lambda^{p-1}(1-\delta)\|\Delta u\|_p^p\mathrm{d}\lambda\\&>\lambda^{p-1}(\delta')(1-\lambda(\delta'))(1-\delta'')r_*^p(\delta')\\&=\varepsilon(\delta',\delta'')>0.\end{aligned}$$

同理，对于 $0<\delta'<\delta''<q/p$ 的情况我们有：

$$\begin{aligned}J(u)-J(v)&=g(1)-g(\lambda(\delta'))\\&=\int_{\lambda(\delta')}^1\lambda^{p-1}(1-\delta)\|\Delta u\|_p^p\mathrm{d}\lambda\\&>\lambda^{p-1}(\delta'')(\lambda(\delta')-1)(\delta''-1)r_*^p(\delta'')\\&=\varepsilon(\delta',\delta'')>0.\end{aligned}$$

因此，(3)中的结论得证。

引理 2.4 对于 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$，假设 $0<J(u)<d$ 且 $\delta_1<1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=J(u)$ 的两个根。那么对于 $\delta_1<1<\delta_2$，$I_\delta(u)$ 的符号是不变的。

证明 首先 $0<J(u)<d$ 表明 $\|\Delta u\|_p\neq0$。采用反证法，如果对于 $\delta_1<1<\delta_2$ 的符号是改变的，那么存在一个 $\bar{\delta}\in(\delta_1,\delta_2)$ 使得 $I_{\bar{\delta}}(u)=0$。由引理 2.3(3)，我们可以得到 $J(u)=d(\delta_1)=d(\delta_2)<d(\bar{\delta})$，此外，由 $d(\delta)$ 的定义有 $J(u)\geq d(\bar{\delta})$，这与 $J(u)<d(\bar{\delta})$ 矛盾。

3. 衰退估计

首先，回忆问题(1)弱解的整体存在性。

引理 3.1 [10]令 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$，p 和 q 满足式(2)，问题(1)有唯一的整体弱解 $u\in L^\infty\left(0,\infty;W_0^{2,p}(\Omega)\right)$，$u_t\in L^2\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\right)$。此外，$u(t)$ 满足下述能量等式：

$$\int_0^t\|u_\tau(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^2\mathrm{d}\tau+J(u(t))\leq J(u_0),\quad 0\leq t\leq\infty \tag{8}$$

引理 3.1 (当 $J(u_0)<d$ 时的不变集合 W_δ)令 $u_0\in W_0^{2,p}(\Omega)$， $0<e<d$ ， $\delta_1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=e$ 的两个根。那么在 $I(u_0)>0$ 且 T 是 u 的最大存在时间的条件下，对于 $\delta_1<1<\delta_2$，$0\le t<T$，问题(1)满足 $J(u_0)=e$ 的所有弱解属于 W_δ 。

证明 令 $u(t)$ 是问题(1)的任一弱解。由 $J(u_0)=e$ ， $I(u_0)>0$ 和引理 2.4 可得 $J(u_0)<d(\delta)$ 和 $I_\delta(u_0)>0$，即对于 $\delta_1<1<\delta_2$ 有 $u_0\in W_\delta$。接下来对于 $\delta_1<1<\delta_2$ 和 $0\le t<T$，我们证明 $u(t)\in W_\delta$。采用反证法，由 $I(u)$ 在时间上的连续性，可假设存在一个 $t_0\in(0,T)$ 使得 $u(t_0)\in\partial W_\delta$，即

$$J(u(t_0))=d(\delta), \tag{9}$$

或

$$I_\delta(u(t_0))=0 \text{ 且 } \|\Delta u(t_0)\|_p\neq 0, \tag{10}$$

显然式(9)与式(8)矛盾，如果式(10)成立那么由 $d(\delta)$ 的定义我们有 $J(u_0)\ge d(\delta)$，这也与式(8)矛盾。因此，引理 3.1 得证。

注 3.1 如果定理 3.1 中的假设 $J(u_0)=e$ 被 $0<J(u_0)\le e$ 代替，那么定理 3.1 的结论仍然成立。

由文献[10]可得为了得到 $2\le p\le q<p(1+4/N)$ 情形下弱解的衰退估计，我们只需要考虑初值满足 $0<J(u_0)<d$ 和 $I(u_0)>0$ 的情形。

定理 3.1 令 $u(t)$ 是问题(1)的弱解，p 和 q 满足式(2)，如果 $0<J(u_0)<d$ 且 $I(u_0)>0$，那么存在一个常数 c_1 使得

$$\|\nabla u(t)\|_2^2\le\begin{cases}\|\nabla u_0\|_2^2\,\mathrm{e}^{\frac{-2c^2(1-\delta_1)}{1+c^2}t}, & p=2,\\ \left[\|\nabla u_0\|_2^{2-p}+\dfrac{(p-2)(1-\delta_1)c^p}{(1+c^2)|\Omega|^{\frac{p-2}{2}}}t\right]^{-\frac{2}{p-2}}, & p>2.\end{cases}$$

证明首先问题(1)的第一个等式两端乘 $u(t)$，并在 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_2^2+\|\Delta u(t)\|_p^p+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u(t)\|_2^2=\int_\Omega|u(t)|^q\ln|u(t)|\mathrm{d}x,\quad 0\le t<+\infty,$$

结合式(6)，经过直接计算得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u(t)\|_2^2+(1-\delta_1)\|\Delta u(t)\|_p^p+I_{\delta_1}(u(t))=0,\quad 0\le t<+\infty, \tag{11}$$

通过引理 3.2，我们得到对于 $\delta_1<1<\delta_2$ 有 $u(t)\in W_\delta$，即有 $I_\delta(u(t))>0$。由 $I_\delta(u)$ 关于 δ 的连续性及 $d(\delta)$ 的定义，可以看出对于 $0\le t<+\infty$ 有 $I_{\delta_1}(u(t))\ge 0$。因此，式(11)可化为

$$\frac{1+c^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u(t)\|_2^2+(1-\delta_1)\|\Delta u(t)\|_p^p\le 0,\quad 0\le t<+\infty. \tag{12}$$

其中 c_1 为 Poincare 系数满足 $\|u\|_2\le c\|\nabla u\|_2$。

接下来，分两种情况考虑。

情形 1 $p=2$

由分部积分公式和带 ε 的 Young 不等式得：

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \upsilon}|\nabla u|^2 \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u\Delta u \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta u \mathrm{d}x \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x \\ &\le \frac{\varepsilon}{2c^2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = c^2$，则得：

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \le \frac{1}{c^2}\int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x. \tag{13}$$

结合(12)和(13)得：

$$\frac{1+c^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u(t)\|_2^2 \le -c^2(1-\delta_1)\|\nabla u(t)\|_2^2, \tag{14}$$

在式(14)中，从 0 到 t 积分得：

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \le \|\nabla u_0\|_2^2 \mathrm{e}^{\frac{-2c^2(1-\delta_1)}{1+c^2}t}.$$

情形 2 $p > 2$

利用 Hölder 不等式有：

$$\|\Delta u(t)\|_2^2 \le |\Omega|^{\frac{p-2}{p}}\|\Delta u(t)\|_p^2, \tag{15}$$

结合(12)、(13)和(15)我们有：

$$\frac{1+c^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u(t)\|_2^2 \le -\frac{(1-\delta_1)c^p}{|\Omega|^{\frac{p-2}{2}}}\|\nabla u(t)\|_2^p, \tag{16}$$

对式(16)在 0 到 t 积分可得：

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \le \left[\|\nabla u_0\|_2^{2-p} + \frac{(p-2)(1-\delta_1)c^p}{(1+c^2)|\Omega|^{\frac{p-2}{2}}}t\right]^{-\frac{2}{p-2}}.$$

定理 3.1 的结论得证。

致　谢

作者对同行评阅人的意见和建议深表感谢。

基金项目

吉林省科技发展计划项目(20240701058FG)。

参考文献

[1] Payne, L.E. and Sattinger, D.H. (1975) Saddle Points and Instability of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Israel Journal of Mathematics*, **22**, 273-303. https://doi.org/10.1007/bf02761595

[2] Yuan, W. and Ge, B. (2022) Global Well-Posedness for Pseudo-Parabolic p-Laplacian Equation with Singular Potential and Logarithmic Nonlinearity. *Journal of Mathematical Physics*, **63**, 1-18. https://doi.org/10.1063/5.0077842

[3] 吴秀兰，杨晓新．一类带有奇异项和对数非局部源的抛物方程解的性质[J]．吉林师范大学学报(自然科学版), 2023, 44(4): 70-78.

[4] Liu, Y.C. (2003) On Potential Wells and Vacuum Isolating of Solutions for Semilinear Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **192**, 155-169. https://doi.org/10.1016/s0022-0396(02)00020-7

[5] Zhou, J. (2019) Behavior of Solutions to a Fourth-Order Nonlinear Parabolic Equation with Logarithmic Nonlinearity. *Applied Mathematics & Optimization*, **84**, 191-225. https://doi.org/10.1007/s00245-019-09642-6

[6] Liao, M.L. and Li, Q.W. (2020) A Class of Fourth-Order Parabolic Equations with Logarithmic Nonlinearity. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **24**, 975-1003. https://doi.org/10.11650/tjm/190801

[7] Wei, L., Wang, J. and Xu, R.Z. (2020) Global Existence and Blow up of Solutions for Pseudo-Parabolic Equation with Singular Potential. *Journal of Differential Equations*, **269**, 4914-4959. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.03.047

[8] 彭迪，石鹏．一类具有对数非线性项的四阶抛物型方程解的全局渐近性[J]．应用数学进展，2020，9(11): 2036-2045.

[9] 韩玉柱，高文杰，石小葳．一类具对数非线性项的薄膜方程[J]．中国科学：数学, 2019, 49(12): 1765-1778.

[10] Liu, Z.Q. and Fang, Z.B. (2023)Well-posedness and Asymptotic Behavior for a Pseudo-Parabolic Equation Involving *p*-Biharmonic Operator and Logarithmic Nonlinearity. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **27**, 487-523. https://doi.org/10.11650/tjm/221106

[11] Wang, J.J. and Liu, C.C. (2019) *P*-Biharmonic Parabolic Equations with Logarithmic Nonlinearity. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2019**, 1-18.

[12] Zhang, M., Liu, Z. and Zhang, X. (2023) Well-Posedness and Asymptotic Behavior for the Dissipative *p*-Biharmonic Wave Equation with Logarithmic Nonlinearity and Damping Terms. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **63**, 1103-1121. https://doi.org/10.1134/s0965542523060192