

应用 $(G'/G' + G + A)$ 展开法求解mKdV方程的精确值解

翁琨锋, 邵廷朗

广东财经大学统计与数学学院, 广东 广州

收稿日期: 2024年6月17日; 录用日期: 2024年7月11日; 发布日期: 2024年7月19日

摘要

作为一个描述非线性波在具有极性对称性的系统中传播的模型, mKdV方程对于研究非线性光学中的波动问题等有重要的价值, 对其作深入研究有利于物理光学中实际问题的解决, 其求解方法的研究有着重要的意义。G'/G' + G + A展开法是近年来发展起来的基于齐次平衡原理的求解非线性偏微分方程的一种较为有效的方法。本文利用G'/G' + G + A展开法, 运用行波变换, 求解了mKdV方程, 得到该方程的精确值解, 并利用数学软件Maple画出了解的图像。

关键词

mKdV方程, G'/G' + G + A展开法, 行波变换

Applying the $(G'/G' + G + A)$ Expansion Method to Solve the Exact Value Solution of mKdV Equation

Kunfeng Weng, Tinglang Shao

School of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: Jun. 17th, 2024; accepted: Jul. 11th, 2024; published: Jul. 19th, 2024

Abstract

As a model to describe the propagation of nonlinear waves in polar symmetric systems, mKdV equation is of great value to the study of wave problems in nonlinear optics. Further study of mKdV equation is beneficial to the solution of practical problems in physical optics, and the study of its

solution method is of great significance. The $G'/G' + G + A$ expansion method is an effective method for solving nonlinear partial differential equations based on the principle of homogeneous equilibrium developed in recent years. In this paper, mKdV equation is solved by using $G'/G' + G + A$ expansion method and traveling wave transformation, and the exact value solution is obtained. Moreover, we use the mathematical software Maple to draw the understanding of the image.

Keywords

mKdV Equation, $G'/G' + G + A$ Expansion Method, Wave Transformation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

mKdV (Modified Korteweg-de Vries)方程最早由 Miura 提出, 是一类重要的非线性波动方程, 同时作为一个描述非线性波在具有极性对称性的系统中传播的模型, mKdV 层次结构在理论物理学和应用数学中得到了广泛的应用。mKdV 作为一个三或四阶非线性抛物型积分方程, 通常用来描述小波的动力学行为。比如在量子场论与凝聚态物理学中的对称超导的结构, 以及在水动力学和湖泊模型中非线性水流的模拟。近年来, 有不少研究人员基于行波变换的基础上去求解 mKdV 方程。而本文主要研究一类 mKdV 方程。对于一般的 mKdV 方程[1]-[6]

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

我们令 $\alpha = 6$, $\beta = -1$, 则得到

$$u_t + 6u^2 u_x - u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

目前的 mKdV 方程求精确解的工作是由产生许多新的和更普遍的精确行波解的愿望所驱动的, 下面我们采用一种较新颖的解法—— $G'/G' + G + A$ 展开法[7]-[12]求解方程(2)的精确值解。

2. $G'/G' + G + A$ 展开法求解方程

$G'/G' + G + A$ 展开法是齐次平衡法则[13]的一个应用。 $G'/G' + G + A$ 展开法是由 Abdul Hamid Ganie 等人研究的, 是在 G'/G 展开法的基础上进行创新而得到的, 主要也是被应用来得到一些非线性偏微分方程的精确解。 $G'/G' + G + A$ 展开法的数学原理同 G'/G 展开法类似, 应用于求解 mKdV 方程的步骤可分为四步, 主要用到行波变换原则、参考 G'/G 展开法中有限次幂级数的假设、齐次平衡法、运用 Maple 数学计算工具来合并 $G'/G' + G + A$ 的同类项来进行超定方程组的求解, 同时所求的系数解用 Maple 软件来进行验证解的准确性, 最后再分情况进行讨论和用 Maple 软件进行画图。

而 Maple 是一款强大的数学软件工具, 是由加拿大滑铁卢大学两位教授 Keith Geddes 和 Gaston Gonnet 领导的科研小组所开发的, 并以加拿大的国树枫叶(Maple)命名。与同类软件相比, Maple 在符号计算和数学推导方面具有明显优势。相较于 MATLAB 等数值计算软件, Maple 在符号计算和精确求解方面更为出色; 而其他符号计算软件相比, Maple 在功能丰富度和易用性方面又表现出色。故本文主要采用 Maple 软件工具进行计算和画图。

在此, 本文先对 $G'/G' + G + A$ 展开法进行简要回顾, 以获得非线性偏微分方程(2)的精确解。让我们考虑如下的方程:

$$f(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3)$$

其中 f 是 $u = u(x, t)$ 及其各阶偏导数的多项式。下面的四个步骤描述了所提出的方法。

步骤 I: 利用行波变换的规则, 得到式(4)的行波解。设 $u(x, t) = u(\tau)$, $\tau = x + ct$, 其中 $c \in \mathbb{R}$ 表示波速, 对方程(2)进行变换, 可得到一个常微分方程:

$$cu_\tau + 6u^2u_\tau - u_{\tau\tau} = 0 \quad (4)$$

再对式(4)积分, 可得:

$$cu + 2u^3 - u_{\tau\tau} = 0 \quad (5)$$

步骤 II: 假设式(5)的解可以表示为 $G'/G' + G + A$ 的有限次幂级数

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G' + G + A} \right)^i \quad (6)$$

其中 $G = G(\tau)$ 满足二阶线性常微分方程

$$G'' + PG' + QG + AQ = 0 \quad (7)$$

式(6)和(7)中系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, P, Q, A$, 为待定常数, 且 $a_m \neq 0$, 正整数 m 由式(5)中含最高阶偏导数的项与最高次的非线性项之间通过齐次平衡原则来确定。

令

$$v = \frac{G'}{G' + G + A} \quad (8)$$

再结合方程(7)可得:

$$v' = (P - Q - 1)v^2 + (2Q - P)v - Q \quad (9)$$

以及

$$v'' = 2(P - Q - 1)vv' + (2Q - P)v' \quad (10)$$

步骤 III: 将式(6)代入式(5), 根据不同条件(7)、(9)和(10)来求解, 合并 $(G'/G' + G + A)$ 的相同幂次项。式(5)的左端变成一个关于 $(G'/G' + G + A)$ 的多项式。再令 $(G'/G' + G + A)$ 各阶幂次的系数为零, 得出求解关于 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, m), c$ 的方程组。

步骤 IV: 求解步骤 III 中建立的含 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, m), c$ 的代数方程, 得出来的解代入式(6), 可得式(2)的精确行波解。此步可通过相关数学软件 Maple 完成。 $(G'/G' + G + A)$ 对应有以下三种形式:

当 $D = P^2 - 4Q > 0$, 有

$$\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} = \frac{C_1(P + \sqrt{D}) + C_2(P - \sqrt{D})e^{\sqrt{D}\tau}}{C_1(P + \sqrt{D} - 2) + C_2(P - \sqrt{D} - 2)e^{\sqrt{D}\tau}} \quad (11)$$

当 $D = P^2 - 4Q < 0$, 有

$$\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} = \frac{(PC_2 + C_1\sqrt{-D})\sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right) + (PC_1 - C_2\sqrt{-D})\cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right)}{\left((P-2)C_2 + C_1\sqrt{-D}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right) + \left((P-2)C_1 - C_2\sqrt{-D}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right)} \quad (12)$$

当 $D = P^2 - 4Q = 0$, 有

$$\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} = \frac{P(C_1 + C_2\tau) - 2C_2}{(P-2)(C_1 + C_2\tau) - 2C_2} \quad (13)$$

3. 求解 mKdV 方程的精确解

由式(5)、(6)和(10), 运用齐次平衡原则, 可得 $m+2=3m$, 可得 $m=1$ 。则式(6)存在以下解:

$$u(\tau) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G' + G + A} \right) \quad (14)$$

再对 $u(\tau)$ 求两次导, 可得:

$$u_{\tau\tau} = a_1 \left(\frac{G'}{G' + G + A} \right)'' \quad (15)$$

把式(15)代入到式(5), 运用 Maple 软件进行计算, 再合并 $\left(\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} \right)^i$ 同类项的系数 ($i=0,1,2,3$), 并令其为零可得超定方程组:

$$\left(\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} \right)^3 : -2P^2a_1 + 4PQa_1 - 2Q^2a_1 + 2a_1^3 + 4pa_1 - 4Qa_1 - 2a_1 = 0, \quad (16)$$

$$\left(\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} \right)^2 : 3P^2a_1 - 9PQa_1 + 6Q^2a_1 + 6a_0a_1^2 - 3Pa_1 + 6Qa_1 = 0, \quad (17)$$

$$\left(\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} \right) : -P^2a_1 + 6PQa_1 - 6Q^2a_1 + 6a_0^2a_1 - 2Qa_1 + ca_1 = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{G'(\tau)}{G'(\tau) + G(\tau) + A} \right)^0 : -PQa_1 + 2Q^2a_1 + 2a_0^3 + ca_0 = 0. \quad (19)$$

而超定方程组是线性代数中的一个概念, 当方程组的未知数数量少于方程数量时, 该方程组就被称为超定方程组。由于超定方程组通常没有精确解, 我们常常会寻求一个近似解, 使得所有方程的残差(即方程的实际值与解代入方程后得到的计算值之间的差)平方和最小。这就是数值分析中所涉及到的最小二乘解的原理。其中, 最小二乘法是可以拟合任意函数的, 而线性回归只是其中一种较简单和常用的函数。

因此, 这里我们选择用线性回归模型来简单讲解最小二乘法的数学原理。首先, 线性回归的因变量是自变量的线性组合, 其定义式可以表示为

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta_0 + \theta_1x_1 + \dots + \theta_{n-1}x_{n-1} \quad (20)$$

其中, $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})^T$ 为参数, $x_i (i=0,1,\dots,n-1)$ 为自变量, h 为因变量。

假设有 m 个观测样本(即方程个数), 每个样本有 n 维特征(即未知量个数), 将所有观测样本带入线性回归方程, 则有

$$\begin{cases} y_1 = \theta_0 + \theta_1x_{1,1} + \theta_2x_{1,2} + \dots + \theta_{n-1}x_{1,n-1} \\ y_2 = \theta_0 + \theta_1x_{2,1} + \theta_2x_{2,2} + \dots + \theta_{n-1}x_{2,n-1} \\ \vdots \\ y_m = \theta_0 + \theta_1x_{m,1} + \theta_2x_{m,2} + \dots + \theta_{n-1}x_{m,n-1} \end{cases} \quad (21)$$

若 $m > n$, 则上述线性回归方程就是超定线性方程组, 该方程组没有精确解, 只能求解其最小二乘解。对该线性回归问题进行建模, 可用矩阵法表示为:

$$H = X\theta \quad (22)$$

其中, X 为自变量构成的矩阵, 它是 $m \times n$ 的矩阵; θ 为要求解的模型参数, 它是 $n \times 1$ 的列向量; H 为给定自变量矩阵后的理论估计向量, 它是 $m \times 1$ 的列向量。

假设 Y 为观测向量, 它也是 $m \times 1$ 的列向量, 由于 X 和 Y 都是已知的, 未知的模型参数是 θ , 则目标函数的矩阵形式可以表示为:

$$J(\theta) = \|H - Y\|^2 = \|X\theta - Y\|^2 = (X\theta - Y)^T (X\theta - Y) \quad (23)$$

该目标函数取得最小值就是导数为 0 的地方, 即:

$$\theta = \arg \min_{\theta} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \quad (24)$$

再直接利用矩阵微积分中矩阵求导的知识, 可得:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = 2X^T X\theta - 2X^T Y = 0 \quad (25)$$

于是有:

$$X^T X\theta = X^T Y \quad (26)$$

若 $X^T X$ 可逆, 则 θ 的最小二乘解为:

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (27)$$

值得注意的是, 线性回归模型比较简单, 可以直接推导出解析解, 而许多非线性的问题也可以转化为线性问题求解, 故这里采用线性回归的情况来讲解最小二乘法中关于矩阵法思想求解的数学方法。而在实际应用中, 我们通常直接使用数学计算软件, 如 Maple, 来求解超定方程组的最小二乘解。

故我们直接运用 Maple 软件来求解上述方程(16)~(19), 可得:

$$c = -\frac{P^2}{2} + 2Q, a_0 = -Q + \frac{P}{2}, a_1 = 1 - P + Q. \quad (28)$$

下面就根据判别式 $D = P^2 - 4Q$ 的三种情形展开讨论

情形 1 当 $D = P^2 - 4Q > 0$, 即把式(11)和式(28)代入式(14), 可以得到式(2)的指数函数解。

$$u(\tau) = -Q + \frac{P}{2} + (1 - P + Q) \left[\frac{C_1(P + \sqrt{D}) + C_2(P - \sqrt{D})e^{\sqrt{D}\tau}}{C_1(P + \sqrt{D} - 2) + C_2(P - \sqrt{D} - 2)e^{\sqrt{D}\tau}} \right] \quad (29)$$

其中 $\tau = \left(-\frac{P^2}{2} + 2Q \right) t + x$, P, Q, C_1, C_2 为任意常数。特别地, 当 $P = 2, Q = -1, C_1 = 1, C_2 = 1$ 时, 我们可以得到

$$u_1(x, t) = 2 - \frac{2(2 + \sqrt{8} + (2 - \sqrt{8})e^{\sqrt{8}(-4t+x)})}{\sqrt{8} - \sqrt{8}e^{\sqrt{8}(-4t+x)}} \quad (30)$$

再用 Maple 软件画出 $u_1(x, t)$ 的三维和二维图像, 如图 1 所示。

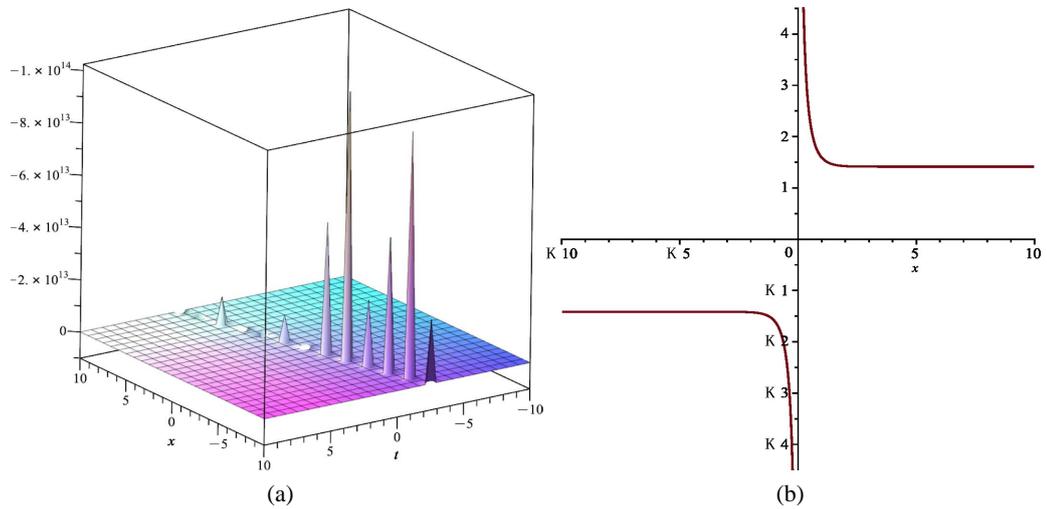


Figure 1. The 3D image of $u_1(x,t)$ with the values $P=2, Q=-1, C_1=1, C_2=1$ and the 2D image of $u_1(x,t)$ with the values $t=0$

图 1. $u_1(x,t)$ 的 3D 图($P=2, Q=-1, C_1=1, C_2=1$)和 2D 图($t=0$)

情形 2 当 $D = P^2 - 4Q < 0$, 同理可得式(2)的三角函数解:

$$u(\tau) = -Q + \frac{P}{2} + (1 - P + Q) \times \left[(PC_2 + C_1\sqrt{-D})\sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right) + (PC_1 - C_2\sqrt{-D})\cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right) \right] / \left[((P-2)C_2 + C_1\sqrt{-D})\sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right) + ((P-2)C_1 - C_2\sqrt{-D})\cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\tau\right) \right] \quad (31)$$

其中 $\tau = \left(-\frac{P^2}{2} + 2Q\right)t + x$, P, Q, C_1, C_2 为任意常数。特别地, 当 $P=1, Q=2, C_1=1, C_2=1$ 时, 我们可以得到:

$$u_2(x,t) = -\frac{3}{2} + \frac{2 \left((1 + \sqrt{7})\sin\left(\frac{\sqrt{7}\left(\frac{7t}{2} + x\right)}{2}\right) + (1 - \sqrt{7})\cos\left(\frac{\sqrt{7}\left(\frac{7t}{2} + x\right)}{2}\right) \right)}{(-1 + \sqrt{7})\sin\left(\frac{\sqrt{7}\left(\frac{7t}{2} + x\right)}{2}\right) + (-1 - \sqrt{7})\cos\left(\frac{\sqrt{7}\left(\frac{7t}{2} + x\right)}{2}\right)} \quad (32)$$

再用 Maple 软件画出 $u_2(x,t)$ 的三维和二维图像, 如图 2 所示。

情形 3 当 $D = P^2 - 4Q = 0$, 可得式(2)的有理函数解:

$$u(\tau) = -Q + \frac{P}{2} + (1 - P + Q) \left[\frac{P(C_1 + C_2\tau) - 2C_2}{(P-2)(C_1 + C_2\tau) - 2C_2} \right] \quad (33)$$

其中 $\tau = \left(-\frac{P^2}{2} + 2Q\right)t + x$, P, Q, C_1, C_2 为任意常数。特别地, 当 $P=6, Q=9, C_1=3, C_2=4$ 时, 我们可以得到:

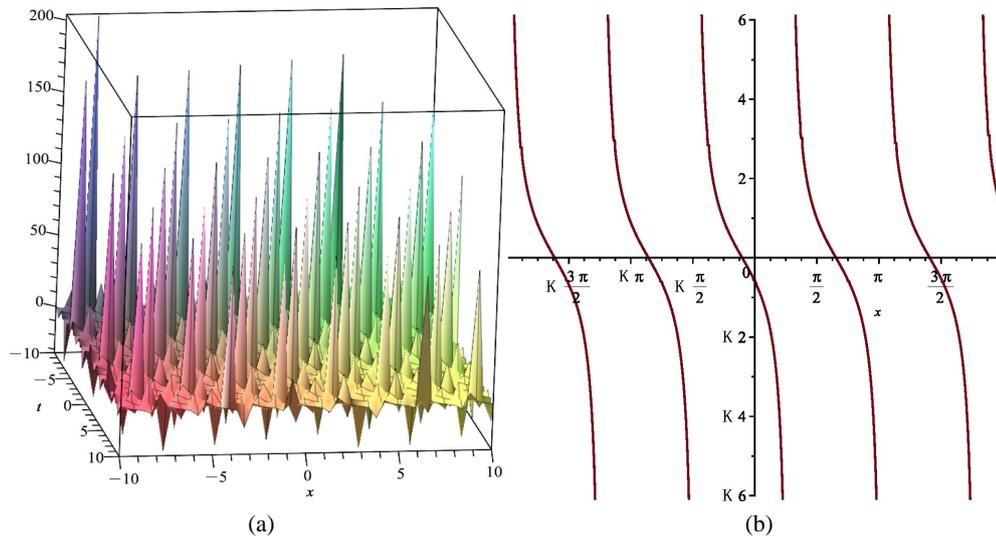


Figure 2. The 3D image of $u_2(x,t)$ with the values $P=1, Q=2, C_1=1, C_2=1$ and the 2D image of $u_2(x,t)$ with the values $t=0$

图 2. $u_2(x,t)$ 的 3D 图($P=1, Q=2, C_1=1, C_2=1$)和 2D 图($t=0$)

$$u_3(x,t) = -6 + \frac{4(10+24x)}{4+16x} \tag{34}$$

再用 Maple 软件画出 $u_3(x,t)$ 的三维和二维图像, 如图 3 所示。

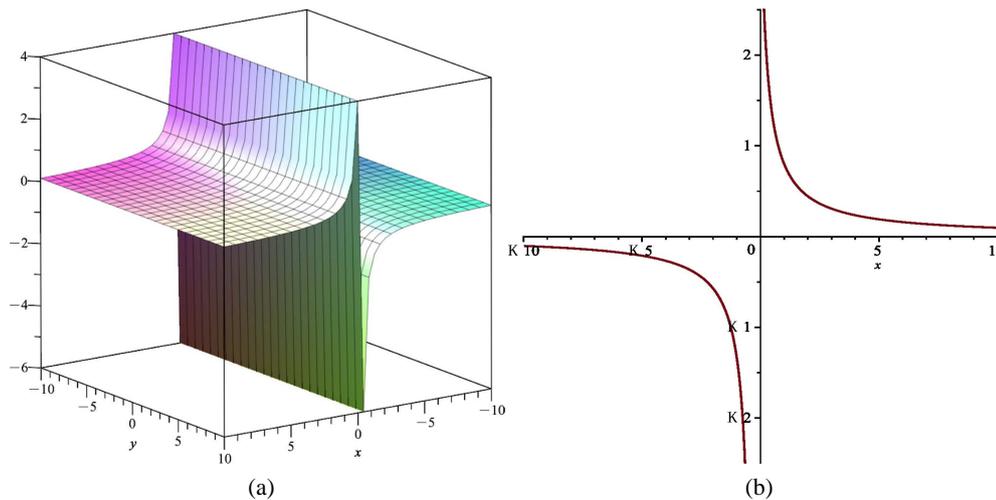


Figure 3. The 3D image of $u_3(x,t)$ with the values $P=6, Q=9, C_1=3, C_2=4$ and the 2D image of $u_3(x,t)$ with the values $t=0$

图 3. $u_3(x,t)$ 的 3D 图($P=6, Q=9, C_1=3, C_2=4$)和 2D 图($t=0$)

4. 结论

本文运用了 $(G'/G + G + A)$ 展开法求解所取特殊值的 mKdV 方程, 得到指数函数解、三角函数解和有理函数解, 再取定待定参数 P, Q, C_1, C_2 的值, 借助 Maple 软件得到这些解所对应的 3D 和 2D 图像。值得

注意的是, 本文研究的 mKdV 方程是包含一类非常重要的非线性偏微分方程, 所得到的精确解的图像将在物理应用上带来一定的理论意义以及实践意义。

参考文献

- [1] 陆求赐, 张宋传, 王学彬. 一类 mKdV 方程的孤立波解[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2021, 30(2): 5-11.
- [2] Ganie, A.H., Sadek, L.H., Tharwat, M.M., Iqbal, M.A., Miah, M.M., Rasid, M.M., *et al.* (2024) New Investigation of the Analytical Behaviors for Some Nonlinear PDEs in Mathematical Physics and Modern Engineering. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, **9**, Article ID: 100608. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2023.100608>
- [3] 李晓燕, 张英, 姚若侠. mKdV 方程的一类新的精确孤立波解[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版), 2013, 33(2): 1-4+8.
- [4] 王思源, 陈浩. 求解 KdV 方程和 mKdV 方程的新方法: (g'/g^2) 展开法[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2014, 46(1): 42-45.
- [5] 李向正. 双函数展开法及 mKdV 方程的行波解[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2013, 34(5): 82-86+9.
- [6] 王鑫. 一类非线性偏微分方程的精确解[J]. 应用数学, 2013, 26(3): 521-525.
- [7] Sahoo, S. and Saha Ray, S. (2016) Solitary Wave Solutions for Time Fractional Third Order Modified KdV Equation Using Two Reliable Techniques (G'/G) -Expansion Method and Improved (G'/G) -Expansion Method. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **448**, 265-282. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.072>
- [8] 陈继培, 陈浩. (g'/g^2) 展开法及其在耦合非线性 Klein-Gordon 方程中的应用[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2012, 44(2): 63-66.
- [9] Wen-An, L., Hao, C. and Guo-Cai, Z. (2009)The (ω/g) -Expansion Method and Its Application to Vakhnenko Equation. *Chinese Physics B*, **18**, 400-404. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/18/2/004>
- [10] Wang, M., Li, X. and Zhang, J. (2008) The (G'/G) -Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **372**, 417-423. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.051>
- [11] Zhang, S., Dong, L., Ba, J. and Sun, Y. (2010) The (G'/G) -Expansion Method for a Discrete Nonlinear Schrödinger Equation. *Pramana*, **74**, 207-218. <https://doi.org/10.1007/s12043-010-0021-z>
- [12] Hong, B., Chen, W., Zhang, S. and Xu, J. (2019) The $(G'/G' + G + A)$ -Expansion Method for Two Types of Nonlinear Schrödinger Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **31**, 1155-1156.
- [13] 王明亮, 李志斌, 周宇斌. 齐次平衡原则及其应用[J]. 兰州大学学报, 1999(3): 8-16.