

各向异性弹性平面含斜裂纹的混合解析函数方法

陈彦晓

上海电子信息职业技术学院公共基础学院, 上海

收稿日期: 2024年6月17日; 录用日期: 2024年7月11日; 发布日期: 2024年7月17日

摘要

文章应用平面弹性复变方法, 得到各向异性弹性平面上复应力函数的混合解析函数表达式, 并将无限各向异性弹性平面上任意斜裂纹问题归结为求解一组混合解析函数边值问题, 通过仿射变换将边值问题转化为奇异积分方程, 最终求出复应力函数及其相应分量。

关键词

各向异性, 混合解析函数, 复应力函数, 斜裂纹

Mixed Analytic Function Method for Anisotropic Elastic Plane with Oblique Cracks

Yanxiao Chen

College of Public Basic Education, Shanghai Electronics and Information Vocational Technical College, Shanghai

Received: Jun. 17th, 2024; accepted: Jul. 11th, 2024; published: Jul. 17th, 2024

Abstract

The hybrid analytic function expressions of the Airy stress function in anisotropic elastic plane were obtained by the method of plane elastic complex variable, and the problem of arbitrary oblique crack in an infinite anisotropic elastic plane boils down to solving a set of mixed boundary value problems of analytic function, the boundary value problem by affine transformation into a singular integral equation, finally the complex stress function and its corresponding weights were

found out.

Keywords

Anisotropy, Mixed Analytic Function, Complex Stress Function, Oblique Crack

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

各向异性材料上的平面弹性力学问题是有应用价值的重要课题，这种材料已被广泛应用于在国防、航空、航天、汽车、船舶等领域。人们对各向异性的材料通常采取“扬长避短”的方式，即在正确的方向使用次方向的特性，使其发挥最佳的性能。然而在实际应用中，介质中的裂纹会对工程造成不同程度的影响，因而研究含裂纹的各向异性材料问题十分有必要。如文献[1] [2]在以往的研究中，通常应用平面弹性复变方法，把解析函数边值问题转化为奇异积分方程进行求解，如文献[3]。为了统一表达式，本文首次引进混合解析函数，得到各向异性弹性平面上复应力函数的混合解析函数表达式，并将这种方法成功应用到各向异性平面上的任意斜裂纹问题中。

2. 各向异性弹性平面上复应力函数的混合解析函数表达式

文献[4]定义并研究了混合解析函数，得到了相应的 Cauchy 公式以及 Plemelj 公式。

在此基础上，文献[5]讨论了各向异性弹性平面上复应力函数的混合解析函数表示，即满足下列协调方程的应力函数 U ：

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + 2(a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \quad (1.1)$$

可以表示为：

$$U = 2 \operatorname{Re} \{ F_1(z) + F_2(z) \}. \quad (1.2)$$

其中：

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_k(\zeta)}{(\eta_k \zeta - \lambda_k \bar{\zeta}) - (\eta_k z - \lambda_k \bar{z})} (\eta_k d\zeta - \lambda_k d\bar{\zeta}), \quad (1.3)$$

和

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_k + \eta_k) = \frac{\mu_k}{\mu_k - \mu_k} \\ \frac{1}{2}(\eta_k - \lambda_k)i = -\frac{1}{\mu_k - \mu_k} \end{cases}, \quad k=1,2.$$

这里 μ_k 材料力学常数而 ω 是待定函数。

令

$$\Phi(z) = \frac{dF_1(z)}{dz}, \quad \Psi(z) = \frac{dF_2(z)}{dz} \tag{1.4}$$

我们有各向异性弹性平面上复应力函数的表达式以及复应力分量与复应力函数的关系。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2\Phi'(z) + \mu_2^2\Psi'(z)] \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\Phi'(z) + \Psi'(z)] \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi'(z) + \mu_2\Psi'(z)] \end{aligned} \right\} \tag{1.5}$$

3. 各向异性平面含斜裂纹的混合解析函数方法

设在无限各向异性材料中含有许多条直线裂纹 L_j , $j=1,2,\dots,n$, 它们与 x 轴的夹角分别为 θ_j , $j=1,2,\dots,n$, 且互不相交, 为方便记 $L = \sum_{j=1}^n L_j$, 取自 a_j 到 b_j 为正向, 见图 1。

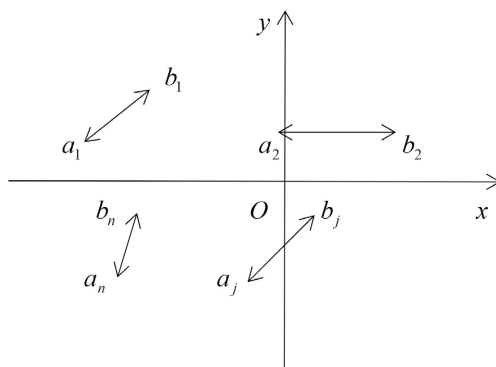


Figure 1. Anisotropic plane model with arbitrarily oriented crack

图 1. 含任意斜裂纹各向异性平面模型

设在裂纹 L 两侧的外应力为 $X_n^\pm + iY_n^\pm$, 外应力主矢量为 0, 在 ∞ 处无外应力和转动. 在边界 L 给定外应力 X_n, Y_n 的情况下, 边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\Phi(z) + \Psi(z)] &= -\int_0^s Y_n ds + c_1 \\ 2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi(z) + \mu_2\Psi(z)] &= \int_0^s X_n ds + c_2 \end{aligned} \right\} \tag{2.1}$$

这里是 c_1, c_2 常数, 在一个边线上它们可以任意指定。

由以上条件, 根据平面弹性力学中的弹性复变方法, 可将求解原弹性平衡问题转化为求解复应力函数满足边界条件的混合解析函数边值问题:

$$a_0\Phi^\pm(t) + b_0\overline{\Phi^\pm(t)} + \Psi^\pm(t) = F^\pm(t) + c, \quad t \in L, \tag{2.2}$$

其中

$$a_0 = \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_2 - \bar{\mu}_2}, \quad b_0 = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_2 - \bar{\mu}_2}$$

$$F^\pm(t) = \frac{(1 - i\bar{\mu}_2)f^\pm(t) - (1 + i\bar{\mu}_2)\overline{f^\pm(t)}}{2i(\mu_2 - \bar{\mu}_2)}$$

$$f^{\pm}(t) = \pm i \int_L [X_n^{\pm}(t) + iY_n^{\pm}(t)] ds, \quad t \in L$$

$$c = \frac{c_2 - \mu_2 c_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

由(2.2)式可得:

$$a_0 [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)] + b_0 [\overline{\Phi^+(t)} - \overline{\Phi^-(t)}] + [\Psi^+(t) - \Psi^-(t)] = F^+(t) - F^-(t) \quad (2.3)$$

$$a_0 [\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] + b_0 [\overline{\Phi^+(t)} + \overline{\Phi^-(t)}] + [\Psi^+(t) + \Psi^-(t)] = F^+(t) + F^-(t) \quad (2.4)$$

考虑 Plemelj 公式, 将(1.18)、(1.20)代入(2.3)式得:

$$a_0 \omega_1(t) + b_0 \overline{\omega_1(t)} + \omega_2(t) = F^+(t) - F^-(t), \quad (2.5)$$

即:

$$\omega_2(t) = -[F^-(t) - F^+(t) + a_0 \omega_1(t) + b_0 \overline{\omega_1(t)}] \quad (2.6)$$

将(2.6)式代入(1.20)式中, 得到:

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{a_0 \omega_1(\zeta) + b_0 \overline{\omega_1(\zeta)} + F^-(\zeta) - F^+(\zeta)}{(\eta_2 \zeta - \lambda_2 \bar{\zeta}) - (\eta_2 z - \lambda_2 \bar{z})} (\eta_2 d\zeta - \lambda_2 d\bar{\zeta}), \quad z \notin L \quad (2.7)$$

再将(1.18)、(2.7)代入(2.4)式中得到奇异积分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{(\eta_1 \zeta - \lambda_1 \bar{\zeta}) - (\eta_1 t - \lambda_1 \bar{t})} (\eta_1 d\zeta - \lambda_1 d\bar{\zeta}) - \frac{a_0}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{(\eta_2 \zeta - \lambda_2 \bar{\zeta}) - (\eta_2 t - \lambda_2 \bar{t})} (\eta_2 d\zeta - \lambda_2 d\bar{\zeta}) \\ & - \frac{b_0}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_1(\zeta)}}{(\overline{\eta_1 \zeta - \lambda_1 \bar{\zeta}}) - (\overline{\eta_1 t - \lambda_1 \bar{t}})} (\overline{\eta_1 d\zeta - \lambda_1 d\bar{\zeta}}) - \frac{b_0}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_1(\zeta)}}{(\overline{\eta_2 \zeta - \lambda_2 \bar{\zeta}}) - (\overline{\eta_2 t - \lambda_2 \bar{t}})} (\overline{\eta_2 d\zeta - \lambda_2 d\bar{\zeta}}) \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{F^-(\zeta) - F^+(\zeta)}{(\eta_2 \zeta - \lambda_2 \bar{\zeta}) - (\eta_2 t - \lambda_2 \bar{t})} (\eta_2 d\zeta - \lambda_2 d\bar{\zeta}) = F^-(t) + F^+(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

同时还要满足位移单值性条件:

$$\int_L \omega_1(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.9)$$

不失一般性, 我们设直裂纹 L_{ab} 与 x 轴方向夹角为 θ , 长度为 $2l$. 其裂纹中点就在 y 轴上(若不在, 可利用坐标将其移到 y 轴上). 引入一个新的实变量 u , 在 L_{ab} 上的参数 ζ 为:

$$\zeta = l \cos \theta \cdot u + i(b + ul \sin \theta), \quad |u| = 1 \quad (2.10)$$

考虑到仿射变换:

$$t = l \cos \theta \cdot u_0 + i(b + u_0 l \sin \theta)$$

$$\zeta = l \cos \theta \cdot u + i(b + ul \sin \theta)$$

$$\bar{\zeta} = l \cos \theta \cdot u - i(b + ul \sin \theta)$$

$$d\zeta = (l \cos \theta + il \sin \theta) du$$

$$d\bar{\zeta} = (l \cos \theta - il \sin \theta) du$$

将上述式子代入 $\omega_1(\zeta)$ 、 $\overline{\omega_1(\zeta)}$ 、 $F^\pm(\zeta)$ 、 $F^\pm(t)$ 中，它们变为 $\omega_1(u)$ 、 $\overline{\omega_1(u)}$ 、 $F^\pm(u)$ 、 $F^\pm(u_0)$ 。
(2.8)式变为：

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\omega_1(u) [(\eta_1 - \lambda_1)l \cos \theta + (\eta_1 + \lambda_1)il \sin \theta] du}{[(\eta_1 - \lambda_1)l \cos \theta + (\eta_1 + \lambda_1)il \sin \theta](u - u_0)} \\ & - \frac{a_0}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\omega_1(u) [(\eta_2 - \lambda_2)l \cos \theta + (\eta_2 + \lambda_2)il \sin \theta] du}{[(\eta_2 - \lambda_2)l \cos \theta + (\eta_2 + \lambda_2)il \sin \theta](u - u_0)} \\ & - \frac{b_0}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\overline{\omega_1(u)} [(\eta_1 - \lambda_1)l \cos \theta + (\eta_1 - \lambda_1)il \sin \theta] du}{[(\eta_1 - \lambda_1)l \cos \theta + (\eta_1 - \lambda_1)il \sin \theta](u - u_0)} \\ & - \frac{b_0}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\overline{\omega_1(u)} [(\eta_2 - \lambda_2)l \cos \theta + (\eta_2 + \lambda_2)il \sin \theta] du}{[(\eta_2 - \lambda_2)l \cos \theta + (\eta_2 + \lambda_2)il \sin \theta](u - u_0)} = g(u_0) \end{aligned}$$

这里

$$g(u_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{F^-(u) - F^+(u)}{u - u_0} du + F^+(u_0) + F^-(u_0). \tag{2.11}$$

整理之后得到：

$$-\frac{2b_0}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\overline{\omega_1(u)}}{u - u_0} du = g(u_0) \tag{2.12}$$

$$\int_{-1}^1 \omega_1(u) du = 0 \tag{2.13}$$

对(2.12)和(2.13)两式进行求导，并记 $\Omega(u) = \omega_1'(u)$ ，于是有：

$$-\frac{2b_0}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\overline{\Omega(u)}}{u - u_0} du = \frac{2(X_n + \overline{\mu_2} Y_n)}{\mu_2 - \mu_2} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{du}{u - u_0} \tag{2.14}$$

$$\int_{-1}^1 \Omega(u) du = 0 \tag{2.15}$$

我们便可得到 $\overline{\Omega(z)}$ 在 $L = \sum_{j=1}^n L_j$ 上的正则型的奇异积分方程：

$$K\Omega = \frac{2\overline{b_0}}{\pi i} \int_L \frac{\Omega(\zeta)}{(\eta_1 \zeta - \overline{\lambda_1 \zeta}) - (\eta_1 t - \overline{\lambda_1 t})} (\eta_1 d\zeta - \overline{\lambda_1 d\zeta}) = \frac{\overline{X_n} + \mu_2 \overline{Y_n}}{\mu_2 - \mu_2} h(t) \tag{2.16}$$

这里 $h(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{1}{(\eta_1 \zeta - \overline{\lambda_1 \zeta}) - (\eta_1 t - \overline{\lambda_1 t})} (\eta_1 d\zeta - \overline{\lambda_1 d\zeta})$ ， $t \in L$ 。

它以 a_j 、 b_j 为节点(积分端点)，要求在 h_0 类中求解，也就是，允许 $\Omega(z)$ 在 a_j 、 b_j 处有不到一阶的奇异性。

由文献[6]，令

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Omega(\zeta)}{(\eta_1 \zeta - \overline{\lambda_1 \zeta}) - (\eta_1 z - \overline{\lambda_1 z})} (\eta_1 d\zeta - \overline{\lambda_1 d\zeta}) \tag{2.17}$$

我们可将(2.16)转化为在 h_0 类中关于 $\Phi_1(z)$ 的非齐次 Riemann 边值问题，

$$\Phi_1^+(t) = -\Phi_1^-(t) + g(t) \tag{2.18}$$

$$g(t) = \frac{\overline{X_n} + \mu_2 \overline{Y_n}}{2b_0(\mu_2 - \mu_1)} h(t) \quad (2.19)$$

其指标 $\kappa = n$ ，并且端点 a 、 b 均为普通端点，从而得到奇异积分方程(2.16)的解：

$$\Phi_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \frac{\overline{X_n} + \mu_2 \overline{Y_n}}{2b_0(\mu_2 - \mu_1)} \int_L \frac{h(\zeta)}{X^+(\zeta) \left[(\eta_1 \zeta - \overline{\lambda_1 \zeta}) - (\eta_1 z - \overline{\lambda_1 z}) \right]} (\eta_1 d\zeta - \overline{\lambda_1 d\zeta}), \quad z \notin L \quad (2.20)$$

其中，

$$X(z) = \prod_{j=1}^n (z - b_j)^{-1} \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^n (b_j - z)}{\prod_{j=1}^n (a_j - z)}} = \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{1}{(z - b_j)(z - a_j)}} \quad (2.21)$$

进而我们可以得到 $\Omega(z)$ 、 $\omega_1(z)$ ，最终求出复应力函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 。

4. 应力强度因子

设 $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\eta_1 \zeta - \overline{\lambda_1 \zeta}) - (\eta_1 z - \overline{\lambda_1 z})} (\eta_1 d\zeta - \overline{\lambda_1 d\zeta})$ ，则：

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Omega(\zeta)}{(\eta_1 \zeta - \overline{\lambda_1 \zeta}) - (\eta_1 z - \overline{\lambda_1 z})} (\eta_1 d\zeta - \overline{\lambda_1 d\zeta})$$

利用仿射变换(2.10)，

由文献[3]，应力强度因子：

$$\begin{aligned} K &= K_I - iK_{II} = \lim_{z \rightarrow l} 2\sqrt{2\pi(z-l)} \Phi'(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow l} 2\sqrt{2\pi(z-l)} \frac{X(z)}{2\pi i} \frac{\overline{X_n} + \mu_2 \overline{Y_n}}{2b_0(\mu_2 - \mu_1)} \int_L \frac{h(\zeta)}{X^+(\zeta) \left[(\eta_1 \zeta - \overline{\lambda_1 \zeta}) - (\eta_1 z - \overline{\lambda_1 z}) \right]} (\eta_1 d\zeta - \overline{\lambda_1 d\zeta}) \end{aligned}$$

5. 数值结果

不失一般性，我们令 $f = 1$ ，则 $X_n = \cos \theta$ ， $Y_n = \sin \theta$ ，取各向异性板的各种参数为：

$$E_1 = 1.4 \times 10^5, \quad E_2 = \frac{1.4}{12} \times 10^5, \quad \nu_1 = 0.46, \quad \nu_2 = \frac{0.46}{12},$$

$$G = 0.12 \times 10^5, \quad \frac{E_1}{E_2} = 12, \quad \mu_1 = 3.08i, \quad \mu_2 = 1.12i$$

当 $\theta = 0$ ，这时我们考虑的是平行于 x 轴的单裂纹，假设作用在裂纹上下边缘的力为零，作用在无穷远处的应力为 Γ ，旋转角为 Γ' 。

带到边界条件(2.2)中得：

$$a_0 \Phi_0^\pm(t) + b_0 \overline{\Phi_0^\pm(t)} + \Psi_0^\pm(t) = F_0^\pm(t)$$

$$F_0^\pm(t) = -(a_0 \Gamma + b_0 \Gamma + \Gamma')t, \quad t \in L$$

这样，我们可以得到奇异积分方程：

$$\frac{2\bar{b}_0}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\Omega(\zeta)}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 t - \bar{\lambda}_1 t)} (\eta_1 d\zeta - \bar{\lambda}_1 d\zeta) = -2(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}'), \quad t \in [-l, l]$$

经过求解，我们可以得到：

$$\Phi_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0 X^+(\zeta) [(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 z - \bar{\lambda}_1 z)]} (\eta_1 d\zeta - \bar{\lambda}_1 d\zeta), \quad z \notin [-l, l]$$

其中 $X(z) = \sqrt{\frac{1}{(z-l)(z+l)}}$ 。

这时，应力强度因子为：

$$\begin{aligned} K &= \lim_{z \rightarrow l} 2\sqrt{2\pi(z-l)}\Phi'(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow l} 2\sqrt{2\pi(z-l)}\Phi_1(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow l} 2\sqrt{2\pi(z-l)} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \sqrt{\frac{1}{(z-l)(z+l)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(\zeta-l)(\zeta+l)}}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 z - \bar{\lambda}_1 z)} (\eta_1 d\zeta - \bar{\lambda}_1 d\zeta) \\ &= \lim_{z \rightarrow l} 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\sqrt{z+l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(\zeta-l)(\zeta+l)} - \sqrt{(z-l)(z+l)}}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 z - \bar{\lambda}_1 z)} (\eta_1 d\zeta - \bar{\lambda}_1 d\zeta) \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow l} 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \sqrt{\frac{1}{z+l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(z-l)(z+l)}}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 z - \bar{\lambda}_1 z)} (\eta_1 d\zeta - \bar{\lambda}_1 d\zeta) \\ &= 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \lim_{z \rightarrow l} \frac{\sqrt{(\zeta-l)(\zeta+l)} - \sqrt{(z-l)(z+l)}}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 z - \bar{\lambda}_1 z)} (\eta_1 d\zeta - \bar{\lambda}_1 d\zeta) \\ &= 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(\zeta-l)(\zeta+l)}}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 l - \bar{\lambda}_1 l)} (\eta_1 d\zeta - \bar{\lambda}_1 d\zeta) \\ &= 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(\zeta-l)(\zeta+l)}}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 l - \bar{\lambda}_1 l)} \eta_1 d\zeta \\ &\quad + 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(\zeta-l)(\zeta+l)}}{(\eta_1\zeta - \bar{\lambda}_1\zeta) - (\eta_1 l - \bar{\lambda}_1 l)} \bar{\lambda}_1 d\zeta \\ &= 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(\zeta-l)(\zeta+l)}}{\zeta-l} d\zeta \\ &= 2\sqrt{2\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \sqrt{\frac{\zeta+l}{\zeta-l}} d\zeta \\ &= 2\sqrt{\pi} \frac{-(\bar{a}_0\Gamma + \bar{b}_0\Gamma + \bar{\Gamma}')}{\bar{b}_0} \frac{1}{\pi i} \sqrt{l} (2\ln\sqrt{2l} + 1) \end{aligned}$$

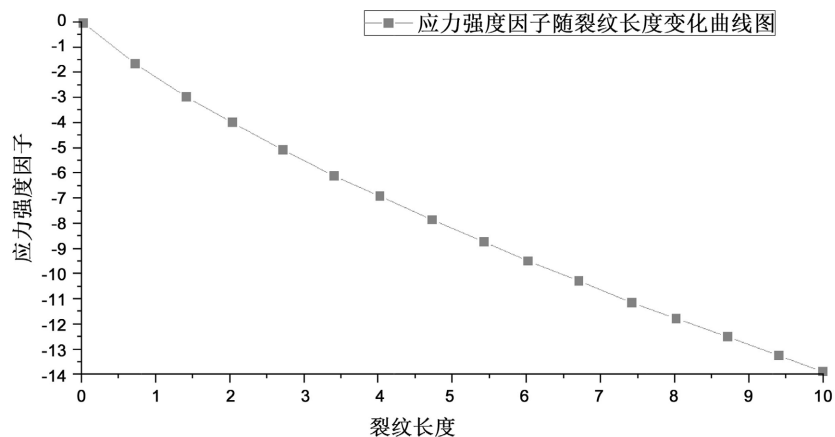


Figure 2. Stress intensity factor versus crack length curve

图 2. 应力强度因子随裂纹长度变化曲线图

不失一般性，我们取 $\Gamma=1$ ， $\Gamma'=0$ ，可以得到精确解时的应力强度因子随裂纹长度变化的曲线(如图 2)。

参考文献

- [1] 蔡海涛, 路见可. 被周期共线裂纹削弱的各向异性弹性平面的第一基本问题[J]. 应用数学和力学, 2009, 30(11): 1341-1348.
- [2] 郑可. 带裂缝的双周期各向异性平面弹性基本问题[J]. 应用数学与计算数学学报, 1993(1): 14-20.
- [3] 张建勇, 李星. 各向异性平面含斜裂纹的奇异积分方程方法[J]. 力学季刊, 2004(2): 248-255.
- [4] 王路路, 刘华. 开口曲线上混合解析函数的 Riemann 边值问题[J]. 宁夏师范学院学报, 2020, 41(10): 33-40.
- [5] 郭艳娟, 刘华, 屈非非. 各向异性弹性平面的混合解析函数方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4483-4488.
- [6] 路见可. 解析函数边值问题教程[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.