

基于多元回归方法计算一般角度射电望远镜反射面的调节

——以FAST为例

张宇翔¹, 姜永胜^{2*}

¹新疆工程学院机电学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆工程学院数理学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2024年6月15日; 录用日期: 2024年7月9日; 发布日期: 2024年7月17日

摘要

天文射电望远镜—FAST是继阿雷西博射电望远镜之后全球最大的望远镜。天眼FAST工作原理, 它在观测天体时, 会随着天体方位的变化, 在其500米的基准球面主动反射面上, 通过调节主锁点的位置, 实时形成工作抛物面。本文在已有的 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$ 的(竖直方向)工作抛物面的计算结果的基础上, 分三步实现了对一般角度的主锁点的移动距离。1) 给出 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$ 每一个促动装置沿竖直方向的移动距离。2) 利用此距离, 通过多元线性回归方法给出一般角度的工作抛物面的方程。3) 利用主锁点的上下坐标计算每一个主锁点处的空间直线方程, 确定空间直线与一般角度的工作抛物面的交点, 得出一般角度的主锁点的实际平移距离。计算方法利用实际观测数据进行了验证, 结果良好。整个过程方法简单, 计算效率高, 有一定的推广价值。

关键词

工作抛物面, 多元线性回归, 方向余弦

Calculating the Adjustment of the Reflective Surface of a General Angle Radio Telescope Based on Multiple Regression Method

—Taking FAST as an Example

Yuxiang Zhang¹, Yongsheng Jiang^{2*}

*通讯作者。

¹College of Electromechanic, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang

²College of Mathematics and Physics, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang

Received: Jun. 15th, 2024; accepted: Jul. 9th, 2024; published: Jul. 17th, 2024

Abstract

The Astronomical Radio Telescope FAST is the world's largest telescope after the Arecibo Radio Telescope. The working principle of Tianyan FAST is that when observing celestial bodies, it will form a working parabolic surface in real-time by adjusting the position of the main locking point on its 500-meter reference spherical active reflection surface as the orientation of the celestial body changes. On the basis of the calculation results of the existing (vertical) working parabolic surface, this article implements the movement distance of the main locking point for general angles in three steps. 1) Provide the vertical movement distance of each actuator. 2) Using this distance, the equation for a general angle working parabolic surface is given using the multiple linear regression method. 3) The spatial line equation at each main locking point is calculated using the upper and lower coordinates of the main locking point, and the intersection point between the spatial line and the general angle working parabolic surface is determined to obtain the actual translation distance of the general angle main locking point. The calculation method was validated using actual observation data, and the results were good. The entire process is simple, computationally efficient, and has a certain promotional value.

Keywords

Working Parabolic Surface, Multiple Linear Regression, Direction Cosine

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着人类对宇宙探索的加深, 2016 年由中国自主建造的特大型球面射电望远镜——FAST 正式建成。它是迄今为止世界上最大单口径、最灵敏的射电望远镜。“FAST”由主动反射面、信号接收系统(馈源舱)及相关的控制、测量和支承系统组成, 其中主动反射面系统是一个可调节的球面, 称为基准球面。工作态时反射面的形状被调节为一个 300 米口径的工作抛物面, 工作抛物面的形成是通过调节促动器的主锁点的径向伸缩来实现的。

目前, 罗平杰[1]通过主反射面控制系统控制策略, 建立自适应、自学习机制节点位移控制模型, 采用开闭环结合控制策略实现反射面高精度实时成型; 王鸿飞、张权[2] [3]基于反射面单元动态面形精度分析研究 FAST 瞬时抛物面的拟合精度; 沙毅[4]根据促动器支撑节点位置, 确定该点促动器所在点的法线方向及促动器所在直线方程, 计算出面向抛物面的大型天线主动面促动器最佳调整量; 李同英等[5]研究了一种确定网状反射面天线原理误差计算的方法; 志远、王杨等[6] [7]利用迭代学习理论建立三维仿真系统对节点进行计算和不断优化, 相比传统算法有了更高的稳健性和求解效率。

以上研究对于垂直方向上的研究已经很成熟, 主要是利用仿真、自学习机制等。本文基于现有研究, 依据 FAST 射电望远镜的主动反射面相关结构和其主动反射面工作原理, 已知天体在工作抛物面的垂直方向上为前提的条件下, 给出一般角度下的简单、有效解决方案。

2. 特殊角度问题的解决——待测天体在正上方 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$

2.1. 工作抛物面的计算

待观测天体位于基准球面正上方, 即 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$ 时, 及待观测天体在 Z 轴的正上方, 结合反射面板调节因素, 确定工作抛物面, 具体的图形见图 1。

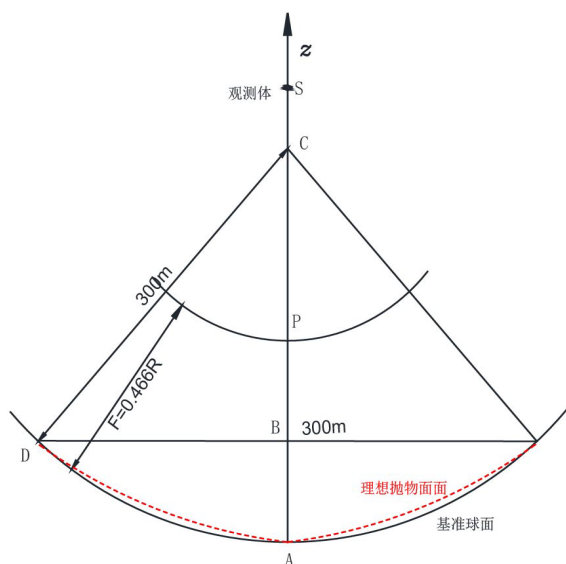


Figure 1. "FAST" sectional view when the observed celestial body is directly above the reference sphere

图 1. 当待观测天体位于基准球面正上方时“FAST”剖面图

当方位角 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$, 观测天体 S 在 Z 轴上, 馈源舱接收平面的中心被移动到直线 SC 与焦面的交点 P 处, 调节基准球面上的部分反射面板形成以直线为对称轴、以 P 为焦点的近似旋转抛物面, 延长 SC 使其交基准球面于 A 。以 C 点为坐标原点 $C:(0,0,0)$, 则此时, 工作抛物面是一个以 P 为焦点的近似旋转抛物面, 由旋转抛物面定义我们可以在 XOZ 面抛物线旋转后得到旋转抛物面, 具体的计算过程如下:

在 XOZ 面上的以 P 为焦点的理想抛物线为 $C: x^2 = 2p(z + z_0)$ 。

理想抛物线绕 Z 轴得到的工作抛物面 $D: (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2p(z + z_0)$, $D: x^2 + y^2 = 2p(z + z_0)$ 。

此时, $2p = 562.37$, $z_0 = -300.7$ $D: x^2 + y^2 = 562.37(z + 300.72)$ 。

2.2. 锁点的选取

对于主锁点的选取是以 B 点为中心半径为 150 米的范围内进行选取,

$$CB = CD \cos 30^\circ = 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 259.8076$$

所以 B 点的坐标为 $B:(0,0,259.8076)$, 以 150 为距离对主锁点进行搜素, 设主锁点的坐标为 Q , 即 $|BQ| \leq 150$, 筛选出 706 个主索点。下面为部分寻找到的主锁点及它搜索到的点的俯视图及正视图, 详见图 2、图 3。

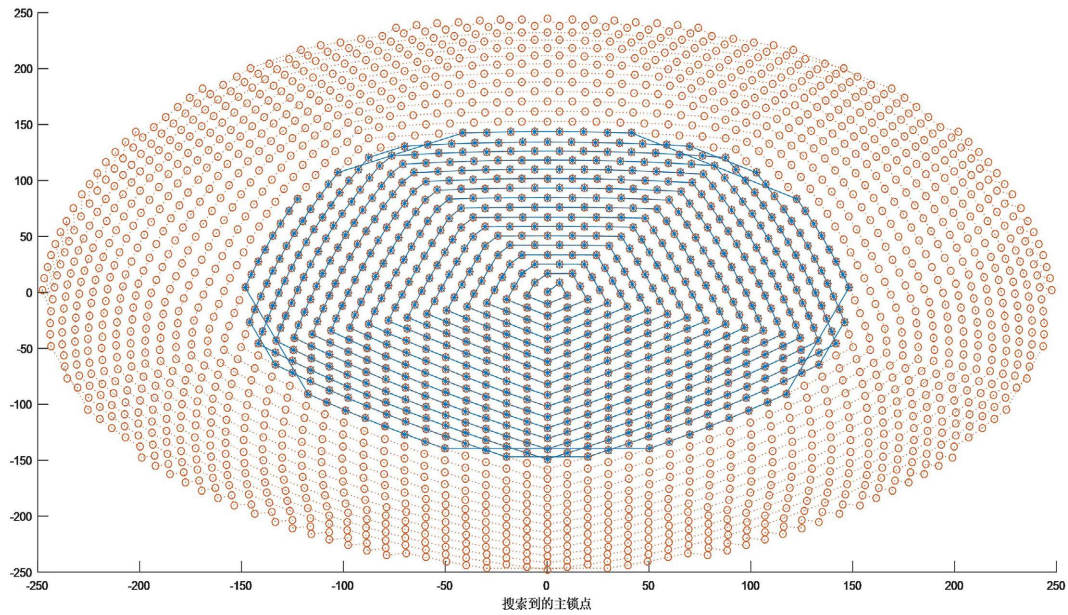


Figure 2. Top view of main lock point
图 2. 主锁点俯视图

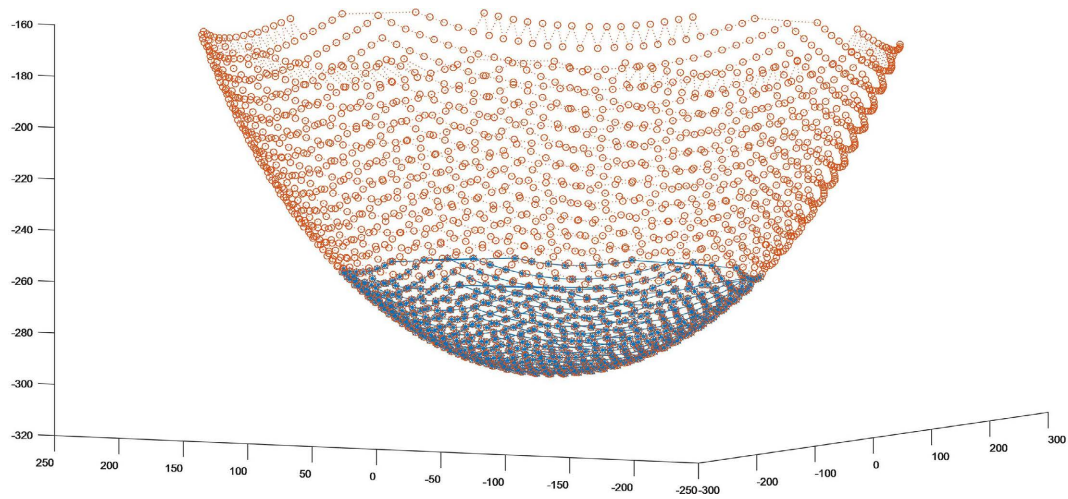


Figure 3. Front view of main lock point
图 3. 主锁点正视图

2.3. 主锁点的平移

2.3.1. 主锁点的寻找

由于每一个主锁点是由 10 米长的三角形面板连接, 故采取的方式是按照每 10 米为一个层级进行平移, 在已知的 706 个主锁点中寻找主锁点第 i 层级到第 $i+1$ 层级 ($i = 0, 1, 2, \dots, 14$) 的距离为 10 米的所有主锁点。其中, 记第 i 层这些点的空间坐标 $Z_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 15$)。实际计算中, 考虑到坐标的测量误差, 层级从 i 到 $i+1$ 层的距离为 $|d_{i+1} - d_i| < 10 + \varepsilon$ 。

2.3.2. 平移距离的选定

第 i 层的平移距离为 $\Delta d_i = Z_i^D - Z_i$, 其中 Z_i^D 为工作抛物面在 (x_i, y_j) 处的取值。平移的方向与 SA 平行, 即 Z

轴的方向, 且 $\Delta d < 0$, 沿 Z 轴正方向, 且 $\Delta d > 0$, 沿 Z 轴负方向, 具体的平移结果详见图4(注: 图中*为原来的坐标, o为移动后坐标)。

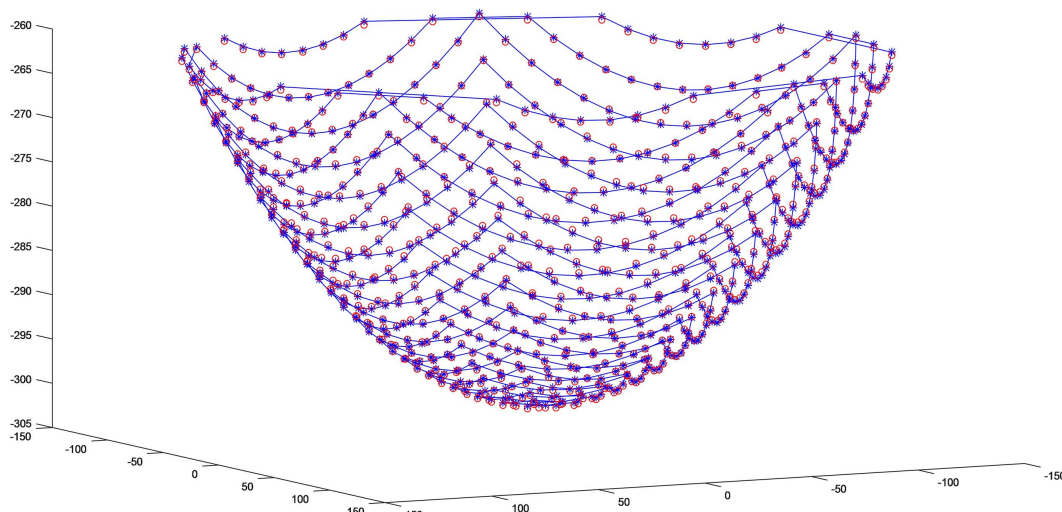


Figure 4. Original coordinates and translation coordinates of main lock point
图4. 主锁点的原坐标与平移坐标

3. 一般角度问题的解决

针对一般角度的问题, 详见图5、图6, 我们采取计算空间直线与球面的交点的方法计算顶点, 之后利用情形一对问题的解决方法, 推广到一般情形。

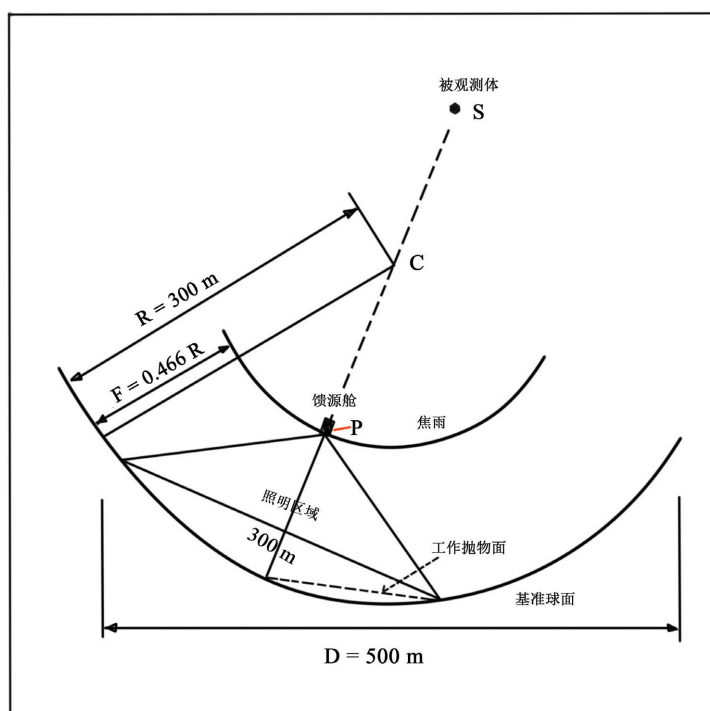


Figure 5. Front view of any angle
图5. 一般角度正视图

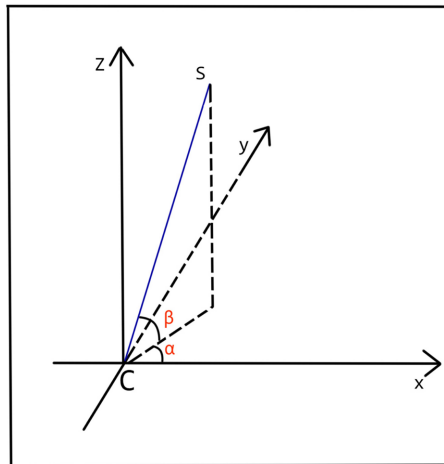


Figure 6. Angle of depression and elevation
图 6. 俯角与仰角

3.1. 确定任意角工作抛物面的顶点 $A(x, y, z)$ 的坐标

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ y = k_1 x = \tan \alpha \cdot x \\ z = k_2 \sqrt{x^2 + y^2} = k_2 \sqrt{1 + k_1^2} x = \tan \beta \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} x \end{cases}, \text{其中 } z < 0.$$

3.2. 确定任意角工作抛物面的中心坐标点 $B(x, y, z)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \left(r \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ y = k_1 x = \tan \alpha \cdot x \\ z = k_2 \sqrt{x^2 + y^2} = k_2 \sqrt{1 + k_1^2} x = \tan \beta \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} x \end{cases}$$

3.3. 主锁点的选取

以 B 点为中心, 以 150 米为距离对主锁点进行搜素, 确定需要移动的主锁点。

3.4. 主锁点的平移

3.4.1. 坐标点移动距离的选定

第 i 层的平移距离为 Δd_i , 与第一问中 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$ 的移动距离相同。

3.4.2. 移动的方向

与 SA 平行, $\Delta d > 0$, 沿 AS 正方向, 且 $\Delta d < 0$, 沿 SA 轴负方向。

3.4.3. 得到的新的工作抛物面的坐标

设工作抛物面的第 i 层的坐标为 $Z_i^D (x_i^D, y_i^D, z_i^D)$, 则:

$$\begin{cases} x_i^D = \Delta d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \\ y_i^D = \Delta d \cdot \cos \beta \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \\ z_i^D = \Delta d \cdot \sin \beta \end{cases}$$

3.4.4. 利用新的工作抛物面的坐标 $Z_i^D(x_i^D, y_i^D, z_i^D)$, 求工作抛物面的方程

考虑到抛物面为斜二次曲面, 计算比较困难, 故采用多元线性回归的方式来计算以上方程, 具体的想法为二次曲面的一般方程为:

$$Z = Ax^2 + Bx + Cxy + Dy^2 + Ey + Fyz + Gz^2 + Hyz$$

通过利用多元线性回归对 x^2 、 xy 、 y^2 、 yz 、 z^2 、 yz 进行线性化处理, 可以计算得到抛物面的方程。

3.4.5. 计算促动器上下连接点所在的直线与工作抛物面的交点

$$\begin{cases} Z = Ax^2 + Bx + Cxy + Dy^2 + Ey + Fyz + Gz^2 + Hyz \\ \frac{x - x_j}{X_j - x_j} = \frac{y - y_j}{Y_j - y_j} = \frac{z - z_j}{Z_j - z_j} \end{cases}$$

其中, (X_j, Y_j, Z_j) 表示促动器上端点的坐标, (x_j, y_j, z_j) 代表促动器下端点的坐标。

3.4.6. 实际当中的促动器的上下连接点的实际距离

$$d = \sqrt{(x - X_j)^2 + (y - Y_j)^2 + (z - Z_j)^2}$$

当 $\alpha = 36.795^\circ$, $\beta = 78.169^\circ$ 时, 计算得到 A、B 点的坐标分别为:

$$A: (-49.3200, -36.8894, -294.0185), \quad B: (-42.7140, -31.9484, -254.6372)$$

$$Z = 0x^2 - 0.1509x + 0xy - 0.1130y + 0y^2 + 0yz + -0.0011z^2 - 197.1562$$

回归分析统计量结果见表 1。

Table 1. Multiple regression statistics

表 1. 多元回归统计量

参数	相关系数 r^2	F 检验	P 值	误差方差估计
	0.9999	6.3823×10^5	0	0.0513

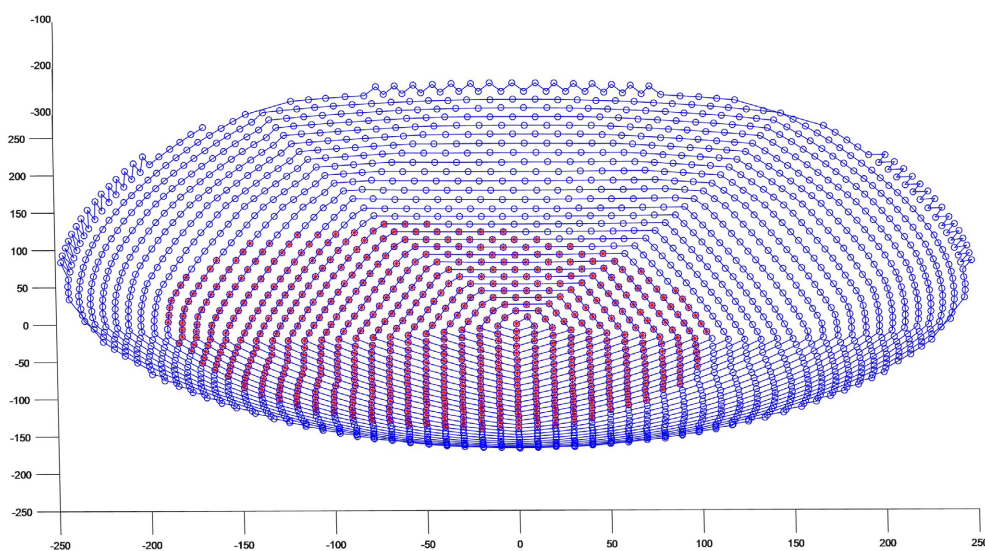


Figure 7. Top view

图 7. 俯视图

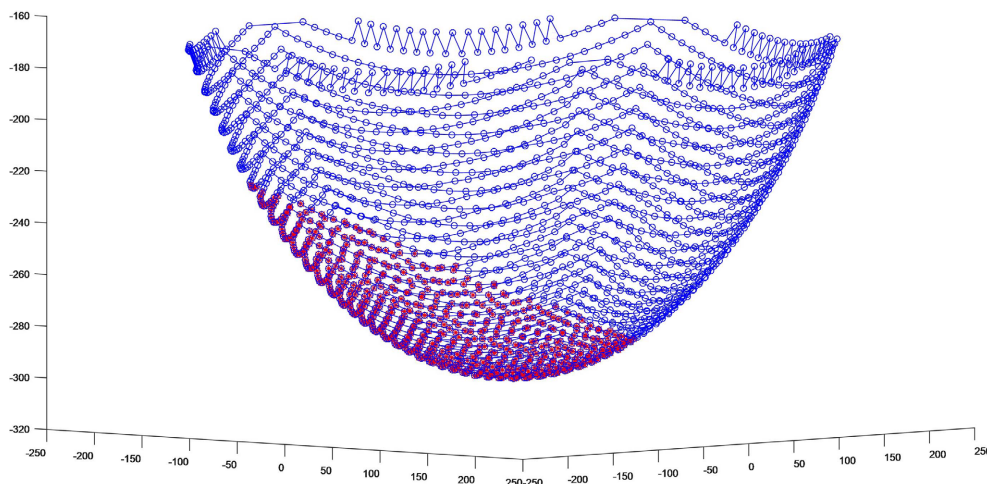


Figure 8. Front view

图 8. 正视图

由表 1 的统计量结果可知, 抛物面的拟合效果非常好。得到主锁点移动前后的俯视图与正视图(图 7、图 8)。

通过以上的计算, 得到了对固定角度的计算。实际上对于一般角度的计算, 只是将向量中的计算公式的角度进行修改即可, 从而解决了在可旋转范围内任意角度的计算。

4. 结语

本文利用了直角坐标系的平移、利用向量的方向角、方向余弦的方法进行对 FAST 反射面的计算, 方法简单易行。通过由特殊情形到一般情形的推广, 简化了问题, 尤其是在移动距离上极大的简化了计算, 通过成熟的多元线性回归的方法, 准确地给出了一般情况下的光滑的抛物面方程, 通过对相关系数等参数的检验, 对结果的正确性进行分析。通过验证, 得到所建立的模型较为合理, 也具有一定的创新性, 模型的结果也比较有说服力, 有一定的推广价值。

参考文献

- [1] 罗平杰, 李亚东, 张国强, 等. FAST 索网张拉过程模拟分析及误差控制[J]. 空间结构, 2017, 23(3): 36-40.
- [2] 王鸿飞, 张建军, 丁辰, 等. 精密三维测边网在 FAST 基准控制网中的应用[J]. 测绘通报, 2016(9): 13-16.
- [3] 张泉, 魏传新, 高源蓬, 等. 空间天文望远镜自适应精密稳像闭环控制[J]. 光学精密工程, 2024, 32(8): 1153-1163.
- [4] 沙毅, 范倩雯, 张立立, 等. 自校正模糊 PID 控制的 FAST 节点位移控制方法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2018, 39(4): 487-491.
- [5] 李同英, 张振超, 李爱华, 王佑. 大型射电望远镜主动反射面控制[J]. 中国科学技术大学学报, 2013, 43(1): 24-28.
- [6] 志远. 基于迭代学习理论的 FAST 整网控制策略的研究[D]: [硕士学位论文]. 秦皇岛: 东北大学, 2015.
- [7] 王杨, 李东年, 宋立强, 等. 基于 OSG 的 FAST 三维运动仿真系统[J]. 计算机仿真, 2023, 40(2): 367-373.