Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(7), 3170-3174**
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137302

关于von Neumann代数上的几种算子拓扑的研究

杨　森

西华师范大学数学与信息学院，四川　南充

收稿日期：2024年6月15日；录用日期：2024年7月9日；发布日期：2024年7月17日

摘　要

设$\mathfrak{A}$是作用于Hilbert空间$\mathcal{H}$上的C^*-代数，$\mathfrak{B}(\mathcal{K})$是作用于Hilbert空间$\mathcal{H}$上的von Neumann代数。本文讨论了$C^*$-代数$\mathfrak{A}$到von Neumann代数$\mathfrak{B}(\mathcal{K})$的线性映射在$\sigma$-强算子拓扑和$\sigma$-弱算子拓扑下的连续性。

关键词

C^*-代数，Von Neumann代数，σ-强算子拓扑，σ-弱算子拓扑，连续

A Study of Several Operator Topologies on von Neumann Algebras

Sen Yang

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Jun. 15th, 2024; accepted: Jul. 9th, 2024; published: Jul. 17th, 2024

Abstract

Let $\mathfrak{A}$ be the C^*-algebra acting on the Hilbert space $\mathcal{H}$, and $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ be the von Neumann algebra acting on the Hilbert space $\mathcal{H}$. In this paper, we discuss the continuity of linear maps from C^*-algebra $\mathfrak{A}$ to von Neumann algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ in σ-strong operator topology and σ-weak operator topology.

文章引用：杨森. 关于 von Neumann 代数上的几种算子拓扑的研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3170-3174.
DOI: 10.12677/aam.2024.137302

Keywords

***C^**-Algebra, von Neumann Algebra, *σ*-Strong Operator Topology, *σ*-Weak Operator Topology, Continuous**

1. 引言

从 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 的 $*$ 同态 φ，称为 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 的表示。$(\mathfrak{A})_r$ 是以 $\mathfrak{A}$ 中 0 为中心，半径为 r 的球；$(\mathfrak{A})_r^+$ 为 $(\mathfrak{A})_r$ 中正算子的集合。线性映射在同一代数上的算子拓扑的连续性，已有很好的研究。例如 2004 年严单贵提出的 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上的几种拓扑[1]；2008 年余保民，薛社教提出的关于 Hilbert 空间的算子空间中的几种拓扑的注记[2]；线性映射在不同代数上的强算子拓扑和弱算子拓扑的连续性也有部分理论。例如 KADISON，R. V.和 RINGROSE，J. R.在 Fundamentals of the Theory of Operator Algebras 中讨论了 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 到 von Neumann 代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 的线性映射在强算子拓扑和弱算子拓扑下的连续性([3]和[4])。本文受到以上文献的启发，证明了 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 到 von Neumann 代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 的线性映射在 σ-强算子拓扑和 σ-弱算子拓扑下的连续性。

2. 正文

2.1. 预备知识

定义 1 [5]：设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间，对于 $\forall\{x_n\}\subseteq\mathcal{H}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$，等式 $p_{\{x_n\}}(T)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 定义了 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上的半范数 $p_{\{x_n\}}(T)$，由半范数族 $\left\{p_{\{x_n\}}:\{x_n\}\subseteq\mathcal{H},\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\right\}$ 生成的 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上的局部凸拓扑称为 σ-强算子拓扑，记为 σ-SOT。

引理 1 [5]：对于 $\forall\{T_\lambda\}\subseteq B(\mathcal{H})$，$T\in B(\mathcal{H})$，$T_\lambda\xrightarrow{\sigma\text{-SOT}}T \Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subseteq\mathcal{H}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\|(T_\lambda-T)x_n\|^2\to0$。

定义 2 [5]：设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间，对于 $\forall\{x_n\},\{y_n\}\subseteq\mathcal{H}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2\right)<\infty$，等式 $p_{\{x_n\},\{y_n\}}(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle Tx_n,y_n\rangle\right|$ 定义了 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上的半范数 $p_{\{x_n\},\{y_n\}}(T)$，由半范数族 $\left\{p_{\{x_n\},\{y_n\}}:\{x_n\},\{y_n\}\subseteq\mathcal{H},\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2\right)<\infty\right\}$ 生成的 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上的局部凸拓扑称为 σ-弱算子拓扑，记为 σ-WOT。

引理 2 [5]：对于 $\forall\{T_\lambda\}\subseteq B(\mathcal{H})$，$T\in B(\mathcal{H})$，$T_\lambda\xrightarrow{\sigma\text{-WOT}}T \Leftrightarrow \forall\{x_n\},\{y_n\}\subseteq\mathcal{H}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2\right)<\infty$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle(T_\lambda-T)x_n,y_n\rangle\right|\to0$。

引理 3 [6]：设 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})_1=\{x\in\mathfrak{B}(\mathcal{H}):\|x\|\le 1\}$ 是 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 的闭单位球，则在 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})_1$ 上。

1) WOT 拓扑 = σ-WOT 拓扑；

2) SOT 拓扑 = σ-SOT 拓扑。

引理 4 [4]：$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 的凸子集 $\mathcal{K}$ 的弱算子闭包和强算子闭包重合。

符号表示：映射 $\varphi(A)=tA$，为了方便表示，本文直接记为 $A\to tA$，其余映射同理。

2.2. 主要定理

定理 1：如果 $\mathfrak{A}$ 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 C^*-代数，$\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 von Neumann 代数，且 η 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 的线性映射，在 $(\mathfrak{A})_r^+$ 中的 0 处 σ-强算子拓扑连续到 σ-弱算子拓扑，那么 η 在 $(\mathfrak{A})_s$ 上是 σ-弱算子拓扑连续的。

证明：因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\|(tA-tA_0)x_n\|^2\le\|t\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|(A-A_0)x_n\|\to 0$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle(tA-tA_0)x_n,y_n\rangle|=|t|\sum_{n=1}^{\infty}|\langle(A-A_0)x_n,y_n\rangle|\to 0$，其中 $\{x_n\},\{y_n\}\in\mathcal{H}$，$A,A_0\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$，$t$ 为标量，所以映射 $A\to tA$ 在 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上是 σ-强算子拓扑和 σ-弱算子拓扑连续的。

同理映射 $B\to tB$ 在 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 上 σ-强算子拓扑和 σ-弱算子拓扑连续的。若 $\|tA\|<r$，则 $\|A\|<t^{-1}r$，所以映射 $tA\to\eta(tA)=t\eta(A)$ 在 $(\mathfrak{A})_{t^{-1}r}$ 上具有与 η 在 $(\mathfrak{A})_r$ 上相同的连续性。

因此我们对 $(\mathfrak{A})_1$ 和 $(\mathfrak{A})_r$ 有相同的假设，如果我们对单个 $(\mathfrak{A})_s$ 建立题目所述的连续性，就可以得出对于所有 $(\mathfrak{A})_s$ 有题目所述连续性。

映射 $A\to A^+$ 和 $A\to A^-$ 将 $\mathfrak{A}$ 的单位球中自伴算子的集合 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 映到 $(\mathfrak{A})_1^+$，

由 $\|Ax_n\|^2=\|A^+x_n\|^2+\|A^-x_n\|^2$ 得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|(A^+-0)x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|A^+x_n\|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}\|A^+x_n\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\|A^-x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|(A-0)x_n\|^2\to 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|(A^--0)x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|A^-x_n\|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}\|A^+x_n\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\|A^-x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|(A-0)x_n\|^2\to 0,$$

所以映射 $A\to A^+$ 和 $A\to A^-$ 在 $\mathfrak{A}_h$ 中的 0 处是 σ-强算子拓扑连续的。

由第一段假设可得，当

$\sum_{n=1}^{\infty}\|(A-0)x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|A^+x_n\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\|A^-x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|(A^+-0)x_n\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\|(A^--0)x_n\|^2\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle(\eta(A)-0)x_n,y_n\rangle|&=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle(\eta(A^+)-\eta(A^-))x_n,y_n\rangle|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\eta(A^+)x_n,y_n\rangle-\langle\eta(A^-)x_n,y_n\rangle|\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\eta(A^+)x_n,y_n\rangle|+\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\eta(A^-)x_n,y_n\rangle|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle(\eta(A^+)-0)x_n,y_n\rangle|+\sum_{n=1}^{\infty}|\langle(\eta(A^-)-0)x_n,y_n\rangle|\to 0\end{aligned}$$

所以映射 $A=A^+-A^-\to\eta(A^+)-\eta(A^-)=\eta(A)$ 在 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 中的0处是 σ-强算子拓连续到 σ-弱算子拓扑。因此 η 在 $(\mathfrak{A}_h)_2$ 上的 0 处有相同的连续性；又由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left(\left(A-A_0\right)-\left(B-A_0\right)\right)x_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left(A-B\right)x_n\right\|^2\to 0$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(\eta(A)-\eta(B)\right)x_n,y_n\right\rangle\right|&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left[\left(\eta(A)-\eta(A_0)\right)-\left(\eta(B)-\eta(A_0)\right)\right]x_n,y_n\right\rangle\right|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(\eta(A-A_0)-\eta(B-A_0)\right)x_n,y_n\right\rangle\right|\to 0\end{aligned}$$

所以映射 $A\to A-A_0\to\eta(A-A_0)=\eta(A)-\eta(A_0)\to\eta(A)$ 在 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 中的 A_0 处是 σ -强算子拓扑连续到 σ -弱算子拓扑。

我们描述了 $B(\mathcal{K})$ 中弱算子开集族的一个子基，使得每个子基都有一个凸补集。

(对于 $B(\mathcal{K})$ 上的弱算子开集族 $\left\{B:\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\left(B-B_0\right)x_n,y_n\right\rangle<a\right\}$，其中 a 为实数， $x_n,y_n\in\mathcal{K}$)。这样一个补在 η 下的逆象与 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 在一个强算子闭凸集相交。由引理 3 和引理 4 可知，这个逆象是弱算子闭的，也是 σ -弱算子闭的，这个逆像的补集，即子基集的逆象，在 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 中是 σ -弱算子开的。由此可以看出，η 从 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 到 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 是 σ -弱算子拓扑连续的。因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(\frac{A+A^*}{2}-\frac{B+B^*}{2}\right)x_n,y_n\right\rangle\right|&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(A-B\right)x_n,y_n\right\rangle+\left\langle\left(A*-B^*\right)x_n,y_n\right\rangle\right|\\&\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(A-B\right)x_n,y_n\right\rangle\right|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle y_n,\left(A-B\right)x_n\right\rangle\right|\to 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(\frac{A+A^*}{2i}-\frac{B-B^*}{2i}\right)x_n,y_n\right\rangle\right|&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(A-B\right)x_n,y_n\right\rangle-\left\langle\left(A*-B^*\right)x_n,y_n\right\rangle\right|\\&\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(A-B\right)x_n,y_n\right\rangle\right|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(A-B\right)y_n,x_n\right\rangle\right|\to 0\end{aligned}$$

所以映射 $A\to\dfrac{A+A^*}{2}$ 和 $A\to\dfrac{A-A^*}{2i}$ 从 $(\mathfrak{A})_1$ 到 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 是 σ -弱算子连续的，

因此映射 $A=\dfrac{A+A^*}{2}+i\dfrac{A-A^*}{2i}\to\eta\left(\dfrac{A+A^*}{2}\right)+\eta\left(i\dfrac{A-A^*}{2i}\right)=\eta(A)$ 从 $(\mathfrak{A}_h)_1$ 到 $B(\mathcal{K})$ 是 σ -弱算子拓扑连续的。由此题目得证。

定理 2：如果 φ 是作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 C^* -代数 $\mathfrak{A}$ 到 von Neumann 代数 $B(\mathcal{K})$ 的表示，并且 φ 在 0 处从 $(\mathfrak{A})_1^+$ 到 $B(\mathcal{K})$ 是 σ -弱算子拓扑连续的，则 φ 从 $(\mathfrak{A})_1$ 到 $B(\mathcal{K})$ 是 σ -强算子拓扑连续的。

证明：由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\left(A^*A-0\right)x_n,y_n\right\rangle\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Ax_n\right\|\left\|Ay_n\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left(A-0\right)x_n\right\|\left\|\left(A-0\right)y_n\right\|\to 0$，

所以映射 $A\to A^*A$ 在 0 处从 $\mathfrak{A}$ (因此，也从 $(\mathfrak{A})_2$)的 σ -强算子拓扑中连续到 $\mathfrak{A}$ 的 σ -弱算子拓扑中。同时因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left(B-0\right)x_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle Bx_n,Bx_n\right\rangle\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(B^*B-0\right)x_n,x_n\right\rangle\right|\to 0$，使得如果 B^*B 在 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 的 σ -弱算子拓扑中趋于 0，则 B 在 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 的 σ -强算子拓扑中趋于 0。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\left(\varphi\left(A^*A\right)-0\right)x_n,x_n\right\rangle\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle\varphi(A)x_n,\varphi(A)x_n\right\rangle\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\varphi(A)x_n\right\|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\varphi\right\|\left\|\left(A-0\right)x_n\right\|^2\to 0$$

因此，$A\to A^*A\to\varphi\left(A^*A\right)=\varphi(A)^*\varphi(A)$ 在 0 处从 $(\mathfrak{A})_2$ 的 σ -强算子拓扑中连续到 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 的 σ -弱算子

拓扑中；且 $A\to\varphi(A)$ 从 $(\mathfrak{A})_2$ 到 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 在 0 处是 σ -强算子拓扑连续的。因此，$A\to\varphi(A)$ 从 $(\mathfrak{A})_1$ 到 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 是 σ -强算子拓扑连续的。

参考文献

[1] 严单贵. B(X)上的几种拓扑[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版), 2004(3): 10-14.

[2] 余保民, 薛社教. 关于 Hilbert 空间的算子空间中几种拓扑的注记[J]. 渭南师范学院学报, 2009, 24(2): 13-15.

[3] Kadison, R.V. and Ringrose, J.R. (1983) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. I. Academic Press.

[4] Kadison, R.V. and Ringrose, J.R. (1986) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. II. Academic Press.

[5] 李炳仁. 算子代数[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[6] 许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾. 算子代数与非交换 L_p 空间引论[M]. 北京: 科学出版社, 2010.