Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3717-3729
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312384

Extropy风险度量及应用

钱天乐*，杨建萍

浙江理工大学理学院，浙江 杭州

收稿日期：2023年11月18日；录用日期：2023年12月19日；发布日期：2023年12月29日

摘　要

为了解决风险喜爱随机优化问题，给风险喜爱投资者的投资行为提供帮助，基于信息理论中的熵提出了Extropy风险度量(ExRM_c)，并对其性质从理论和应用两个方面进行了研究。理论研究表明Extropy风险度量是一个具有一致性且风险偏好的度量，而且关于参数c具有连续性、可微性与鲁棒性。投资组合选取问题的应用研究表明：ExRM_c考虑了风险收益平衡，且与随机比较中的3阶递增凸序相一致，是一个合理的风险度量。最后把ExRM_c风险度量应用于解决风险喜爱随机优化问题，得到了一个全有或全无的决策。这些主要结果表明Extropy风险度量补充了传统期望效用理论中风险度量的不足，合理地解释了银行对于信贷与现金持有之间的典型商业决策时，要么不发放任何贷款要么全部选择信贷的行为。

关键词

Extropy，对偶，风险喜爱，随机优化，投资组合选择

Extropy Risk Measure and Its Applications

Tianle Qian*, Jianping Yang

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang

Received: Nov. 18th, 2023; accepted: Dec. 19th, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

To solve the risk-loving stochastic optimization problems and provide assistance for risk-loving investors' investment behavior, Extropy risk measure is proposed based on entropy in information theory and its important properties are studied respectively from theory and application. Theoretical research shows that it is a measure with consistency and risk-loving preference, and is continuous, differentiable, and robust on parameter *c*. The research on application of portfolio selection problem shows that it is a reasonable risk measure with balance between risk and return and is consistent with the 3rd order increasing convex order in random comparison. Finally,

*通讯作者。

文章引用: 钱天乐, 杨建萍. Extropy 风险度量及应用[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3717-3729.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312384

it is applied into solving out risk-loving stochastic optimization problem, which yields an all or nothing decision. These results illustrate that Extropy risk measure can be an efficient supplement of risk measure in the traditional expected utility theory and can formally explain the banks' behavior of either not issuing any loans or choosing credit for all when they make typical commercial decisions between credit and cash holdings.

Keywords

Extropy, Duality, Risk-Loving, Stochastic Optimization, Portfolio Selection

1. 引言

风险度量是将风险分配给一个数值的泛函。传统的风险度量方法有方差法、标准差法以及灵敏度分析等。1952 年 Markowitz [1]使用均值衡量收益，引入方差度量风险，解决了传统的投资组合优化问题。近年来，随着新的金融产品的不断涌现和基于行为金融学随机优化问题研究的不断深入，发现传统的投资优化理论已不能有效的指导新型金融市场中投资者的投资行为[2] [3]。具有投资偏好的随机优化问题已成为现代投资理论研究的一个重点，而如何发展风险度量理论，使其能精准地度量当今有效市场模型中纷繁复杂的金融风险，指导具有风险偏好的投资者有效地规避各种金融风险[4]，是解决这一问题的核心。

众所周知，最优的风险度量是不存在的。对于具体的研究问题，Rachev [5]提出具有理想性质的风险度量是存在的。AVaR (Average Value-at-Risk)是当今风险厌恶投资优化问题研究中最为流行的一个风险度量。Föllmer 和 Schied [6]对 AVaR 风险度量的性质进行了系统的研究，发现它具有良好的性质，是金融数学研究领域中的一个有效工具。Wei [7]研究了在期望效用理论的标准框架下，以 AVaR 为风险度量的动态投资组合优化问题。Wang 和 Zitikis [8]发现 AVaR 鼓励投资组合多样化，这使得 AVaR 成为当前金融监管框架下较好的风险度量。Artzner [9]等认为一个好的风险度量要满足一致性，但 AVaR 风险度量不是一个一致性风险度量，且在考虑风险和收益的权衡时也存在着一些缺陷。最近，Ahmadi-Javid [10] [11]提出了一个一致性风险度量——EVaR (Entropic Value-at-Risk)。基于切尔诺夫不等式，发现它是 AVaR 风险度量的紧上界。Delbaen 等[12]使用它通过最大化期末净财富的期望指数效用解决了对冲一个未定权益的问题。EVaR 风险度量跟期望效用理论中的扭曲风险度量之间有密切的联系。基于它的随机优化模型能较好的描述金融市场中风险厌恶投资者的投资行为。事实上，投资者的风险偏好除了风险厌恶以外，还有风险喜好。发展风险度量，解决风险喜爱随机优化问题是本文的主要动机。

EVaR 风险度量的构建基于信息熵理论中的香农熵(Shannon Entropy)。而基于熵定义风险度量以研究风险厌恶投资优化问题也成为了行为金融数学研究的一个方向[13] [14]。香农熵是信息理论中的一个重要概念，是 1948 年香农提出的[15]，用以度量概率分布的不确定性。但是，近期越来越多的学者认为香农熵不是一个完美的不确定性度量，他们认为香农熵度量一个一个事件的信息量，只考虑了这一事件发生时所提供的信息，而没有考虑它不发生时提供的信息。为此，Lad 等[16]在香农熵定义的基础上，引入 Extropy 熵概念用以描述一个事件不发生时，它所包含的信息量。Extropy 熵在数学形式上与香农熵互补对偶，是香农熵的一个很好的补充。为了解决已有的 EVaR 风险度量无法精确度量风险喜爱投资者面临的投资风险的问题，本文在香农熵风险度量的基础上，用 Extropy 熵构建新的风险度量，探索 Extropy 风

险度量与风险喜爱期望效用理论之间的关系，以说明 Extropy 风险度量是具有风险喜爱的风险度量，并把它应用于风险偏好的随机优化问题中，解决经典的期望效用理论无法解释“当银行面临关于信用风险承担与现金持有之间的典型商业决策时，银行要么不发放任何新贷款，要么全部选择信贷的行为”的投资行为。

2. Extropy 风险度量

2.1. 风险度量

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为一个概率空间，其中Ω是所有基本事件的集合，$\mathcal{F}$是Ω子集的σ-代数，P是$\mathcal{F}$上的概率测度。定义$\mathcal{X}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的实值随机变量所构成的向量空间，满足$\mathrm{E}\left[X^2\right]<\infty$。在投资随机优化模型中，随机变量$X\in\mathcal{X}$的正值(负值)表示资产组合在未来某个时刻的收益(损失)，X也常称为金融寸头。

给定风险度量$\rho:\mathcal{X}\to\mathbf{R}$，对任意的$X\in\mathcal{X}$，在金融数学中$\rho(X)$表示为了使$X$成为可接受的金融寸头所需的最小资本额。一个好的风险度量一般具有以下性质[17]：对于$X,Y\in\mathcal{X}$，有

a) 单调性：如果$X\le Y$，则$\rho(X)\le\rho(Y)$；

b) 现金可加性：对任意的$m\in\mathbf{R}$，$\rho(X+m)=\rho(X)+m$；

c) 凸性：对任意的$\lambda\in[0,1]$，$\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y)\le\lambda\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y)$；

d) 正齐次性：对任意的$\alpha>0$，$\rho(\alpha X)=\alpha\rho(X)$；

e) 次可加性：$\rho(X+Y)\le\rho(X)+\rho(Y)$；

f) 分布不变性：对任意$X,Y\in\mathcal{X}$，X和Y有相同的概率分布，$\rho(X)=\rho(Y)$。

在金融数学中，满足性质 a)和 b)的风险度量称为货币风险度量[6]；满足性质 c)的货币风险度量称为凸风险度量[18]；满足性质 d)和 e)的货币风险度量称为一致性风险度量[9]，AVaR 不是一致性风险度量，而 EVaR 则是一致性风险度量。

2.2. Extropy 风险度量及其表示

首先回顾 Lad 等[16]定义的 Extropy 熵。

定义 1 对任意的$X\in\mathcal{X}$，定义概率密度函数为f，Extropy 熵定义为：

$$J(X)=-\frac{1}{2}\int f^2(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

在实际应用中，Extropy 熵常用来度量随机变量X概率分布的不确定性。为衡量不同概率分布之间的差异，Lad 等[16]引入了相对 Extropy 的概念：对于$(\Omega,\mathcal{F})$上任意两个概率测度$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，称对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，只要$\boldsymbol{P}(A)<\delta(\varepsilon)$，$A\in\mathcal{F}$，$|\boldsymbol{Q}(A)|<\varepsilon$，就有$\boldsymbol{Q}$对于$\boldsymbol{P}$是绝对连续的，记作$\boldsymbol{Q}\ll\boldsymbol{P}$，显然$\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}\boldsymbol{P}\ge 0$且$\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}\boldsymbol{P}\right]=1$。因此$\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}\boldsymbol{P}$也常被称为密度随机变量。此外，对任意给定的概率测度$\mathcal{P}$，令

$$\mathcal{P}=\left\{\boldsymbol{Q}:\boldsymbol{Q}\text{ 是}(\Omega,\mathcal{F})\text{上的概率测度且 }\boldsymbol{Q}\ll\boldsymbol{P}\right\}.$$

定义 2 [16]对于$(\Omega,\mathcal{F})$上任意两个概率测度$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，相对 Extropy 的定义为：

$$J(\boldsymbol{Q}\mid\boldsymbol{P}):=\begin{cases}\int\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{P}-1, & \boldsymbol{Q}\ll\boldsymbol{P}\\ +\infty, & \text{其它}\end{cases} \tag{2}$$

其中假设期望是有限的。

很明显 $J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\geq 0$。如果 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 有相同的概率分布，那么 $J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})=0$。

定义 3 设 $X\in\mathcal{X}$，对于任意的 $c\geq 0$，Extropy 风险度量定义为：

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\leq c}\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)X\right] \tag{3}$$

性质：$\mathrm{ExRM}_c(X)$是一个具有分布不变性的一致性风险度量。

证明：根据 $\mathrm{ExRM}_c(X)$的定义，显然 a)、b)、f)成立。下面证明 $\mathrm{ExRM}_c(X)$满足 d)、e)。对任意 $X\in\mathcal{X}$，任意的 $\alpha>0$，

$$\begin{aligned}\mathrm{ExRM}_c(\alpha X)&=\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\leq c}\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)\alpha X\right]\\&=\alpha\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\leq c}\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)X\right]\\&=\alpha\mathrm{ExRM}_c(X).\end{aligned}$$

并且，对任意的 $X,Y\in\mathcal{X}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{ExRM}_c(X+Y)&=\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\leq c}\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)(X+Y)\right]\\&=\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\leq c}\left\{\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)X\right]+\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)Y\right]\right\}\\&\leq\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\leq c}\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)X\right]+\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\leq c}\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)Y\right]\\&=\mathrm{ExRM}_c(X)+\mathrm{ExRM}_c(Y).\end{aligned}$$

证毕。

Dentcheva 等[19]首先对风险度量的对偶表示进行了研究。Zou 等[20]得到了 EVaR 的对偶表示，该表示说明 EVaR 风险度量能很好的描述风险厌恶投资者对投资风险的态度。接下来将探究 $\mathrm{ExRM}_c(X)$的对偶表示，以探索 Extropy 风险度量与期望效用理论中不同效用函数类之间的关系，识别这一风险度量是否能描述风险喜爱投资者对投资风险的态度。

定理 4 设 $X\in\mathcal{X}$ 且 $0<c<\infty$，Extropy 风险度量的对偶表示形式如下：

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\left\{\eta+(1+c)^{\frac{1}{2}}\left\|(X-\eta)_+\right\|_2\right\} \tag{4}$$

其中 $\|X\|_2=\left(\mathrm{E}|X|^2\right)^{1/2}$。

证明：证明过程类似于 Pichler 和 Schlotter [21]中定理 12 的证明。

基于 Extropy 风险度量的对偶表示，很容易得到：对于任意 $X\in\mathcal{X}$，都有

$$\mathrm{E}[X]\leq\mathrm{ExRM}_c(X)\leq(1+c)^{1/2}\|X\|_2.$$

很明显，对于参数 $c>0$，式(4)右边的最优解 η^* 满足

$$\frac{\mathrm{Var}\left(\left(X-\eta^*\right)_+\right)}{c}=\left(\mathrm{E}\left[\left(X-\eta^*\right)_+\right]\right)^2 \tag{5}$$

当 $\eta^*<\text{ess-sup}\,X$，结合式(4)与(5)，$\mathrm{ExRM}_c(X)$风险度量定义中的最优密度随机变量 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}^*/\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 可表示为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}^*}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}=\frac{\left(X-\eta^*\right)_+}{\mathrm{E}\left(X-\eta^*\right)_+} \tag{6}$$

当 $\eta^*=\text{ess-sup}\,X$，最优密度随机变量 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}^*/\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_{X=\text{ess-sup}\,X}/p^*$，其中 $p^*:=\mathrm{P}\left(X=\text{ess-sup}\,X\right)$。

行为金融学理论认为投资者的决策行为受其风险偏好的影响。在经典的期望效用理论中，投资者的风险的偏好用效用函数来描述：喜爱财富并风险厌恶的偏好对用于单调增的凹效用函数；喜爱财富并风险喜爱的偏好对用于单调增的凸效用函数。对任意的 $\eta\in\mathbf{R}$，令 $u_\eta(x)=(x-\eta)_+^2$，$u_\eta(x)$ 是一个单调递增且凸的函数，基于公式(4)，$\mathrm{ExRM}_c(X)$可以表示为：

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\left\{\eta+(1+c)^{1/2}\left[\mathrm{E}u_\eta(X)\right]^{1/2}\right\}.$$

则对任意的 $X\in\mathcal{X}$，期望效用函数值 $\mathrm{E}\left[u_\eta(X)\right]=\mathrm{E}\left[(X-\eta)_+^2\right]$ 可以用来描述风险喜爱投资者的投资行为。因此基于 Extropy 风险度量的对偶表示可以很好地度量风险喜爱投资者在未来某一时刻投资金融产品 X 的预期收益。

Haezendonck 和 Goovaerts [22]基于 Orlicz 保费原理提出了 Haezendonck-Goovaerts 风险度量，它是流行的尾部风险度量 TVAR 的一个非线性推广，被广泛应用在保险和精算研究领域。Bellini 等[23]把 Haezendonck-Goovaerts 风险度量的表达式定义为：

$$\rho_c(X)=\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\left\{\eta+H_c\left((X-\eta)_+\right)\right\}.$$

H_c 是 Orlicz 范数。从定理 4 可以看出，风险度量 ExRM_c 是 Haezendonck-Goovaerts 风险度量的特殊情况，H_c 是 L^2 范数。

在风险度量的公理化体系中，Kusuoka 表示对于分布不变性风险度量是非常重要的一个结果。Kusuoka [24]基于对偶性建立了一致性风险度量的 Kusuoka 表示；Frittelli 和 Gianin [25]、Dentcheva 等[19]将 Kusuoka 表示法推广到凸风险度量。Zou 等[20]探索了 Rényi 熵风险度量的 Kusuoka 表示法。下面将给出 $\mathrm{ExRM}_c(X)$的 Kusuoka 表示法，发现它可以表示为混合 AVaR 风险度量的最大值。首先，回忆一下 AVaR [20]的定义。对于给定的置信水平 $\alpha\in[0,1]$，

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X)=\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\mathrm{VaR}_s(X)\mathrm{d}s \tag{7}$$

其中 $\mathrm{VaR}_\alpha(X)=\inf\left\{x:P(X\le x)\ge\alpha\right\}$。

定理 5 (Kusuoka 表示形式) 设 $X\in\mathcal{X}$，对任意的 $0\le c<\infty$，ExRM_c 的 Kusuoka 表示形式如下：

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=\sup_{\mu\in\mathcal{M}_c}\int_0^1\mathrm{AVaR}_v(X)\mu(\mathrm{d}v) \tag{8}$$

其中

$$\mathcal{M}_c=\left\{\mu\in\mathcal{M}([0,1]):\mathrm{E}\left[\int_0^U\frac{1}{1-v}\mu(\mathrm{d}v)\right]^2\le 1+c\right\},$$

$\mathcal{M}([0,1])$ 是空间 $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ 上定义的概率测度集。

证明 令 $Z=\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 表示密度随机变量，满足 $Z\ge 0$ 且 $\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}[Z]=1$。根据式(3)，$\mathrm{ExRM}_c$ 的表达式重写为：

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=\sup\left\{\mathrm{E}[XZ]:Z>0,\mathrm{E}Z=1,\mathrm{E}\left[Z^2\right]\le 1+c\right\} \tag{9}$$

令 F 和 H 分别表示随机变量 X 和密度随机变量 Z 的概率分布函数。那么，存在一个在 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量 U，使得 $X=F^{-1}(U)$ 几乎处处成立。类似于 Zou 等[20]定理 2.3 的证明，让 F^{-1} 表示 F

的右逆，H^{-1} 表示 H 的右逆，即 $F^{-1}(u)=\sup\{x:F(x)\le u\}$，$H^{-1}(u)=\sup\{x:H(x)\le u\}$，$u\in[0,1]$。根据 Föllmer 和 Schied [18]的引理 4.60，有

$$\sup_{Z\sim H}\mathrm{E}[XZ]=\mathrm{E}\left[F^{-1}(U)H^{-1}(U)\right] \tag{10}$$

因此，在空间 $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ 上定义一个正的局部有限测度 v，使得 $v(0)=H^{-1}(0)$。因为 $Z\ge 0$，所以 $H^{-1}(0)\ge 0$。对 $0\le s<t\le 1$，有 $v((s,t])=H^{-1}(t)-H^{-1}(s)$，特别地，对于 $0<t\le 1$，

$$v((0,t])=H^{-1}(t)-H^{-1}(0),\ v([0,t])=H^{-1}(t),\ v(\mathrm{d}t)=\mathrm{d}\left(H^{-1}(t)\right).$$

在空间 $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ 上定义一个新的度量 μ 如下：

$$\mu(0)=v(0)=H^{-1}(0),\ \mu(\mathrm{d}t)=(1-t)v(\mathrm{d}t),\ t\in(0,1].$$

那么，

$$\begin{aligned}\mu([0,1])&=\int_0^1(1-t)v(\mathrm{d}t)+\mu(0)\\&=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}H^{-1}(t)+H^{-1}(0)\\&=\left[-H^{-1}(0)+\int_0^1H^{-1}(t)\mathrm{d}t\right]+H^{-1}(0)\\&=\int_0^1H^{-1}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_0^1H^{-1}(t)\mathrm{d}t=\mathrm{E}\left[H^{-1}(U)\right]=\mathrm{E}[Z]=1.$$

因此，μ 是在 $[0,1]$ 上的概率测度。那么，对于 $t\in[0,1]$，显然有

$$H^{-1}(t)=\int_0^t\frac{1}{1-v}\mu(\mathrm{d}v).$$

这意味着，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[F^{-1}(U)H^{-1}(U)\right]&=\int_0^1F^{-1}(t)H^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^1F^{-1}(t)\left(\int_0^t\frac{1}{1-v}\mu(\mathrm{d}v)\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{1}{1-v}\left(\int_v^1F^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\mu(\mathrm{d}v)=\int_0^1\mathrm{AVaR}_v(X)\mu(\mathrm{d}v),\end{aligned}$$

再根据密度随机变量 $Z=\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}\boldsymbol{P}$，可得

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{Q}\mid\boldsymbol{P})&=\mathrm{E}\left[Z^2\right]-1=\mathrm{E}\left[\left(H^{-1}(U)\right)^2\right]-1\\&=\mathrm{E}\left[\left(\int_0^U\frac{1}{1-v}\mu(\mathrm{d}v)\right)^2\right]-1.\end{aligned}$$

证毕。

3. ExRM$_c$ 的一些重要性质

对给定的随机变量 X，为了研究风险度量 ExRM$_c(X)$随参数 c 的变化规律，构建了 ExRM$_c$ 作为参数 c 的函数

$$c\mapsto \mathrm{ExRM}_c(X).$$

很明显，对于任意的 $X \in \mathcal{X}$，ExRM_c 在 $c>0$ 上单调递增。

在下面的性质中，将证明 $\mathrm{ExRM}_c(X)$在 $c\in[0,\infty)$ 上连续，在 $c\in(0,\infty)$ 上可微。首先，对于给定的 $X \in \mathcal{X}$，定义函数

$$h_c(X,\eta)=\eta+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta)_+\right\|_2, 0<c<\infty, \eta\in\mathbf{R},$$

和

$$\eta_c=\arg\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\{h_c(X,\eta)\}, 0<c<\infty.$$

引理 6 对于每一个非退化的 $X \in \mathcal{X}$，η_c 在 $c\in(0,\infty)$ 上是递增且连续的。

证明 由 Ogryczak 和 Ruszczyński [26]中的性质 6 可知：$\left\|(X-\eta)_+\right\|_2$ 在 $\eta<\text{ess-sup}\,X$ 上连续可微，其导函数为

$$\frac{\mathrm{d}\left\|(X-\eta)_+\right\|_2}{\mathrm{d}\eta}=-\frac{\left\|(X-\eta)_+\right\|_1}{\left\|(X-\eta)_+\right\|_2}\triangleq\varphi(X,\eta);$$

$\left\|(X-\eta)_+\right\|_2$ 在 $\eta\in\mathbf{R}$ 上是单调递减且凸的。因此，对于单调递增且非退化的 X，当 $\eta<\text{ess-sup}\,X$，

$$\frac{\partial h_c(X,\eta)}{\partial\eta}=1+\sqrt{1+c}\frac{\mathrm{d}\left\|(X-\eta)_+\right\|_2}{\mathrm{d}\eta}=1+\sqrt{1+c}\varphi(X,\eta).$$

则 $\eta_c<\text{ess-sup}\,X$。由于 $\varphi(X,\eta)$ 在 $\eta\le\text{ess-sup}\,X$ 上单调递增且连续，η_c 满足下列等式

$$\varphi(X,\eta_c)=-\frac{1}{\sqrt{1+c}} \tag{11}$$

因此，根据式(11)可知 η_c 在 c 上单调递增且连续。

证毕。

性质 7 对于给定的 $X \in \mathcal{X}$，$\mathrm{ExRM}_c(X)$在 $c\in[0,\infty)$ 上是连续的。

证明 假设 X 是非退化的，首先证明 $\mathrm{ExRM}_c(X)$在 $c\in(0,\infty)$ 上是连续的。对于 $0<c_3\le c_1\le c_2<1$，由于 $\mathrm{ExRM}_c(X)$在 $c\in[0,\infty)$ 上是单调递增的，所以有 $\mathrm{ExRM}_{c_1}(X)\le\mathrm{ExRM}_{c_2}(X)$。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{ExRM}_{c_2}-\mathrm{ExRM}_{c_1}&\le h_{c_2}(X,\eta_{c_1})-h_{c_1}(X,\eta_{c_1})\\&=\left(\sqrt{1+c_2}-\sqrt{1+c_1}\right)\cdot\left\|(X-\eta_{c_1})_+\right\|_2.\end{aligned}$$

显然这个不等式的右边部分在 c_1 处是连续的，这就表明了 $\mathrm{ExRM}_c(X)$在 c_1 处右连续的。此外，对于 $0<c_1/2<c_3<c_1$，从引理 6 中推出 $\eta_{c_3}\ge\eta_{c_1/2}$。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{ExRM}_{c_1}-\mathrm{ExRM}_{c_3}&\le h_{c_1}(X,\eta_{c_3})-h_{c_3}(X,\eta_{c_3})\\&=\left(\sqrt{1+c_1}-\sqrt{1+c_3}\right)\cdot\left\|(X-\eta_{c_3})_+\right\|_2\\&\le\left(\sqrt{1+c_1}-\sqrt{1+c_3}\right)\cdot\left\|(X-\eta_{c_1/2})_+\right\|_2.\end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{ExRM}_c(X)$在 c_1 处是左连续的。因此，$\mathrm{ExRM}_c(X)$在 $c\in(0,\infty)$ 上是连续的。

下面证明 $\mathrm{ExRM}_c(X)$在 $c\in\{0\}$ 点处是连续的。显然，

$$\lim_{c\downarrow0}\mathrm{ExRM}_c(X)=\inf_{c>0}\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\{h_c(X,\eta)\}=\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\inf_{c>0}\{h_c(X,\eta)\}=\mathrm{ExRM}_0(X).$$

证毕。

性质 8 对于给定的 $X\in\mathcal{X}$，ExRM$_c(X)$在 $c\in(0,\infty)$ 上是可微的，并且

$$\frac{\mathrm{dExRM}_c(X)}{\mathrm{d}c}=\frac{1}{2\sqrt{1+c}}\left\|(X-\eta_c)_+\right\|_2 \tag{12}$$

证明 当 $\Delta c>0$，有

$$\frac{\mathrm{ExRM}_{c+\Delta c}(X)-\mathrm{ExRM}_c(X)}{\Delta c}\le\frac{\sqrt{1+c+\Delta c}-\sqrt{1+c}}{\Delta c}\left\|(X-\eta_c)_+\right\|_2,$$

和

$$\frac{\mathrm{ExRM}_{c+\Delta c}(X)-\mathrm{ExRM}_c(X)}{\Delta c}\ge\frac{\sqrt{1+c+\Delta c}-\sqrt{1+c}}{\Delta c}\left\|(X-\eta_{c+\Delta c})_+\right\|_2,$$

根据引理 6，当 $\Delta c\downarrow 0$，有

$$\lim_{\Delta c\downarrow 0}\frac{\mathrm{ExRM}_{c+\Delta c}(X)-\mathrm{ExRM}_c(X)}{\Delta c}=\frac{1}{2\sqrt{1+c}}\left\|(X-\eta_c)_+\right\|_2.$$

类似地，可以得到

$$\lim_{\Delta c\uparrow 0}\frac{\mathrm{ExRM}_{c+\Delta c}(X)-\mathrm{ExRM}_c(X)}{\Delta c}=\frac{1}{2\sqrt{1+c}}\left\|(X-\eta_c)_+\right\|_2.$$

证毕。

Pflug 和 Wozabal [27]通过使用 Wasserstein 距离给出了 AVaR 的鲁棒性。由此，下面证明基于 Wasserstein 距离的 ExRM$_c(X)$的鲁棒性。首先回顾 Wasserstein 距离 $d(X,Y)$：对任意的 $X,Y\in\mathcal{X}$，有累积分布函数 $F(x)$ 和 $G(x)$，定义 X 和 Y 之间的 Wasserstein 距离 $d(X,Y)$

$$d(X,Y)=\inf\left\{\|X-Y\|_2 : X\sim F(x),Y\sim G(x)\right\}. \tag{13}$$

对于这个距离，有很多有效的等价描述，其中最为常用的等价描述如下：

$$d(X,Y)=\left(\int_0^1\left|F^{-1}(u)-G^{-1}(u)\right|^2\mathrm{d}u\right)^{1/2} \tag{14}$$

其中 F^{-1} 和 G^{-1} 分别是 X 和 Y 的分位数函数。Krätschmer 等[28]证明了 Wasserstein 距离的收敛比分布的收敛要强，更准确地说，

$$d(X_n,X)\to 0 \text{ 当且仅当 } X_n\xrightarrow{d}X,\quad \mathrm{E}|X_n|^2\to\mathrm{E}|X|^2 \tag{15}$$

其中 $X_n\xrightarrow{d}X$ 表示 X_n 在分布上收敛于 X。

性质 9 设 $X,Y\in\mathcal{X}$，$c\in(0,\infty)$，则有

$$\left|\mathrm{ExRM}_c(X)-\mathrm{ExRM}_c(Y)\right|\le\sqrt{1+c}\,\mathrm{d}(X,Y) \tag{16}$$

证明 假设 $\mathrm{ExRM}_c(X)\le\mathrm{ExRM}_c(Y)$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{ExRM}_c(Y)-\mathrm{ExRM}_c(X)&\le\left(\eta_c+\sqrt{1+c}\left\|(Y-\eta_c)_+\right\|_2\right)-\left(\eta_c+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta_c)_+\right\|_2\right)\\
&=\sqrt{1+c}\left(\left\|(Y-\eta_c)_+\right\|_2-\left\|(X-\eta_c)_+\right\|_2\right)\\
&\le\sqrt{1+c}\inf\left\{\left\|(\tilde{Y}-\eta_c)_+-(\tilde{X}-\eta_c)_+\right\|_2 : \tilde{X}\sim F(x),\tilde{Y}\sim G(x)\right\}\\
&=\sqrt{1+c}\,\mathrm{d}\left((Y-\eta_c)_+,(X-\eta_c)_+\right)\\
&\le\sqrt{1+c}\,\mathrm{d}(X,Y).
\end{aligned}$$

其中第二个不等式来自范数$\|\cdot\|_2$的三角不等式，而最后一个不等式是由于对所有的$x,y\in\mathbf{R}$，

$$\left|(x-a)_+-(y-a)_+\right|\le|x-y|.$$

证毕。

风险度量 ExRM$_c(X)$具有鲁棒性，因此它具备准确且稳定地量化风险的能力，能有效地受市场波动等背景风险影响的投资产品，为决策者提供可靠的风险评估结果，以支持其做出恰当决策。

4. ExRM$_c$ 在投资优化问题中的应用

4.1. ExRM*c* 的收益风险平衡性

在投资组合理论中，投资者在追求高收益的同时，同时又希望可以尽可能地降低风险，所以投资随机优化的最大化或者最小化目标函数应同时包含收益和风险这两部分。ExRM$_c(X)$风险度量考虑了风险与收益的权衡。若X是投资资产在未来某时刻的损失，根据 ExRM$_c(X)$的现金可加性，有

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=-\mathrm{E}[-X]+\mathrm{ExRM}_c(X-\mathrm{E}[X]) \tag{17}$$

因此，在投资随机优化问题中，最小化“整体”ExRM$_c(X)$的同时代表着最大化收益$\mathrm{E}[-X]$和最小化“纯”$\mathrm{ExRM}_c(X-\mathrm{E}[X])$。在投资优化问题中，指数分布是一种较为常见的分布，下面将给出一个跟指数分布有关的例子以说明 ExRM$_c(X)$考虑了风险与收益的权衡。

例 10 假设随机变量X服从参数为λ的指数分布。对给定的$c\in[0,\infty)$，令

$$\eta_1=\underset{\eta\in(-\infty,0]}{\arg\min}\left\{\eta+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta)_+\right\|_2\right\},$$

和

$$\eta_2=\underset{\eta\in[0,+\infty)}{\arg\min}\left\{\eta+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta)_+\right\|_2\right\},$$

则

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=\min\left\{\eta_1+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta_1)_+\right\|_2,\eta_2+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta_2)_+\right\|_2\right\}.$$

当$\eta\le0$，为计算η_1值与对应的$\eta_1+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta_1)_+\right\|_2$值，令

$$\begin{aligned}h_c(X,\eta)&=\eta+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta)_+\right\|_2\\&=\eta+\sqrt{1+c}\left[\int_0^{+\infty}\left(x^2-2\eta x+\eta^2\right)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right]^{1/2}\\&=\eta+\sqrt{1+c}\left(\frac{2}{\lambda^2}-2\eta\frac{1}{\lambda}+\eta^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}h_c(X,\eta)}{\mathrm{d}\eta}=1+\sqrt{1+c}\left(\frac{2}{\lambda^2}-2\eta\frac{1}{\lambda}+\eta^2\right)^{-1/2}\left(\eta-\frac{1}{\lambda}\right).$$

因此，当$c>1$时，有$\eta_1=0$和$\eta_1+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta_1)_+\right\|_2=\sqrt{2(1+c)}/\lambda$；当$0\le c\le1$时，有$\eta_1=\left(1-1/\sqrt{c}\right)/\lambda$和$\eta_1+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta_1)_+\right\|_2=1/\lambda+\sqrt{c}/\lambda$。

类似地，考虑当$\eta\ge0$，当$0\le c\le1$时，有$\eta_2=0$和$\eta_2+\sqrt{1+c}\left\|(X-\eta_2)_+\right\|_2=\left(\sqrt{2(1+c)}\right)/\lambda$；当$c>1$时，

有 $\eta_2=\ln\left((1+c)/2\right)/\lambda$ 和 $\eta_2+\sqrt{1+c}\left\|\left(X-\eta_2\right)_+\right\|_2=1/\lambda+\left[\ln\left((1+c)/2\right)/\lambda+1/\lambda\right]$。

因此，

$$\mathrm{ExRM}_c\left(X\right)=\begin{cases}1/\lambda+\sqrt{c}/\lambda, & 0\le c\le 1,\\ 1/\lambda+\left[\ln\left((1+c)/2\right)/\lambda+1/\lambda\right], & c>1.\end{cases}$$

4.2. ExRM$_c$ 在随机比较中的应用

在行为金融数学中，除了期望效用理论常用来研究金融市场市场中投资者的投资行为外，随机占优也经常用来比较两个投资决策进而做出选择，是一种具有经济学含义的风险比较工具。

本节涉及到了用于描述投资组合问题中递增风险模型的 n 阶递增凸序(icx)的概念。Shaked 和 Shanthikumar [29]给出了 $n-\mathrm{icx}$ 序的定义：对 $X,Y\in\mathcal{X}$，任意的 $x\in\mathbf{R}$，若满足

$$\left\|\left(X-x\right)_+\right\|_{n-1}\le\left\|\left(Y-x\right)_+\right\|_{n-1},\tag{18}$$

则称 X 依 $n-\mathrm{icx}$ 序小于 Y，记为 $X\le_{n-\mathrm{icx}}Y$。

当然，$X\le_{n-\mathrm{icx}}Y$ 可以由期望效用理论来刻画，即 $X\le_{n-\mathrm{icx}}Y$ 当且仅当对于每个递增效用函数 $u(x)$ 且满足 $u^{(n)}(x)\ge 0$，有

$$\mathrm{E}\left[u\left(X\right)\right]\le\mathrm{E}\left[u\left(Y\right)\right].$$

Menezes 等[30]将 $X\le_{3-\mathrm{icx}}Y$ 解释为 X 的右侧风险要比 Y 的小，这意味着 X 的收益分布相对于 Y 来说更加稳定，也就是说 X 的极端不利情况出现的可能性较小。

性质 11 设 $X,Y\in\mathcal{X}$，对任意的 $c\in[0,\infty)$，$X\le_{3-\mathrm{icx}}Y$ 成立当且仅当 $\mathrm{ExRM}_c\left(X\right)\le\mathrm{ExRM}_c\left(Y\right)$。

证明 必要性：假设 $X\le_{3-\mathrm{icx}}Y$，从式(18)可知，对于任意的 $\eta\in\mathbf{R}$，都有 $\left\|\left(X-\eta\right)_+\right\|_2\le\left\|\left(Y-\eta\right)_+\right\|_2$，因此

$$\eta+\sqrt{1+c}\left\|\left(X-\eta\right)_+\right\|_2\le\eta+\sqrt{1+c}\left\|\left(Y-\eta\right)_+\right\|_2.$$

这意味着

$$\mathrm{ExRM}_c\left(X\right)=\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\left\{\eta+\sqrt{1+c}\left\|\left(X-\eta\right)_+\right\|_2\right\}\le\inf_{\eta\in\mathbf{R}}\left\{\eta+\sqrt{1+c}\left\|\left(Y-\eta\right)_+\right\|_2\right\}=\mathrm{ExRM}_c\left(Y\right).$$

充分性：假设对任意的 $c\ge 0$，$\mathrm{ExRM}_c\left(X\right)\le\mathrm{ExRM}_c\left(Y\right)$。这只要证明对任意的 $\eta\in\mathbf{R}$，有 $\left\|\left(X-\eta\right)_+\right\|_2\le\left\|\left(Y-\eta\right)_+\right\|_2$。

假设 X 是非退化的(对另一种情况，证明过程是显然的)。由引理 6 和式(6)可知，η_c 是 c 的递增连续函数，其中

$$\lim_{c\downarrow 0}\eta_c=-\infty,\ \lim_{c\uparrow\infty}\eta_c=\text{ess-sup}\,X,$$

因此，对于任意的 $\eta\in\left(-\infty,\text{ess-sup}\,X\right)$，存在 c_η，使得

$$\mathrm{ExRM}_{c_\eta}\left(X\right)=\eta+\sqrt{1+c_\eta}\left\|\left(X-\eta\right)_+\right\|_2,$$

因此

$$\mathrm{ExRM}_{c_\eta}\left(X\right)=\eta+\sqrt{1+c_\eta}\left\|\left(X-\eta\right)_+\right\|_2\le\mathrm{ExRM}_{c_\eta}\left(Y\right)\le\eta+\sqrt{1+c_\eta}\left\|\left(Y-\eta\right)_+\right\|_2.$$

这意味着对任意的 $\eta\in\left(-\infty,\text{ess-sup}\,X\right)$，都有 $\left\|\left(X-\eta\right)_+\right\|_2\le\left\|\left(Y-\eta\right)_+\right\|_2$；同时对于任意的 $\eta\ge\text{ess-sup}\,X$，

都有 $0=\left\|(X-\eta)_+\right\|_2 \le \left\|(Y-\eta)_+\right\|_2$。因此，对于任意的 $\eta\in\mathbf{R}$，都有 $\left\|(X-\eta)_+\right\|_2 \le \left\|(Y-\eta)_+\right\|_2$。

证毕。

4.3. ExRM*c* 在投资组合问题中的应用

Arrow [31]和 Pratt [32]在研究风险厌恶的随机优化问题时提出了一个标准的投资组合。给定 ω_0 为投资者的确定性初始财富；z 和 $z-\omega_0$ 分别表示投资于风险资产和无风险资产的数量，其中 $z\in[0,\omega_0]$；风险资产和无风险资产的资产收益分别记为 $R-1$ 和 $r-1$，其中 $R\in\mathcal{X}$；投资者的最终财富为 $W(z)=(w_0-z)\cdot r+z\cdot R$。我们将对于此投资组合，利用 ExRM_c 风险度量，寻找它的最优投资组合，即：

$$z^* = \arg\max_{[0,w_0]} \mathrm{ExRM}_c\left((w_0-z)\cdot r+z\cdot R\right) \tag{19}$$

性质 12 上述投资组合问题的最优投资 z^* 为：

$$z^*\begin{cases} =\omega_0, & \mathrm{ExRM}_c(R)>r=\mathrm{ExRM}_c(r) \\ \in[0,\omega_0], & \mathrm{ExRM}_c(R)=r=\mathrm{ExRM}_c(r) \\ =0, & \mathrm{ExRM}_c(R)<r=\mathrm{ExRM}_c(r) \end{cases} \tag{20}$$

并且有以下结论：

如果风险溢价为正，即 $\mathrm{E}(R)-r>0$，那么风险资产的最优投资 $z^*>0$；

风险资产的最优投资 z^* 关于参数 c 是递增的，即对于 $c_A\le c_B$，$z^*(c_A)\le z^*(c_B)$。

证明 根据 ExRM_c 的平移不变性和正齐次性，

$$\begin{aligned}\mathrm{ExRM}_c(W(z)) &= \mathrm{ExRM}_c\left(z\cdot R+(\omega_0-z)r\right) \\ &= z\mathrm{ExRM}_c(R)+(\omega_0-z)r,\end{aligned}$$

相应的导数为

$$\frac{\mathrm{dExRM}_c(W(z))}{\mathrm{d}z}=\mathrm{ExRM}_c(R)-r.$$

不包括决策变量 z，因此得出式(20)中给出的投资组合决策。

因为

$$\mathrm{ExRM}_c(X)=\sup_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{P}:J(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{P})\le c}\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right)X\right]\ge\mathrm{E}[X],$$

结论 a)成立。

另外，因为 ExRM_c 关于参数 c 单调递增，所以对于 $c_A\le c_B$，有 $z^*(c_A)\le z^*(c_B)$，则结论 b)成立。

证毕。

从性质 12 可知，对于上述随机优化问题，当风险溢价 $\mathrm{E}(R)-r>0$ 时，全部投资风险资产是最优的。最大化 ExRM_c 产生一个全有或全无的决策：要么投资者完全进行无风险投资，要么完全投资风险资产。而在 $\mathrm{ExRM}_c(R)=r$ 的特殊情况中，投资者对于任意投资组合 $z\in[0,w_0]$ 都是可接受的。然而，在传统期望效用理论下，Brandtner 等[33]研究表明在熵风险度量下的投资决策是多样化的。产生这两种结果差异的原因是因为传统的期望理论是在假设投资者是风险厌恶的背景下进行的，而 ExRM_c 与风险喜爱的效用函数有关，二者针对的决策者的风险偏好不同，ExRM_c 能够弥补目前期望效用理论下风险度量无法有效刻画风险喜爱投资者行为的不足。

事实上，在当今金融市场中，既存在着投资多样性的个体行为，也存在着投资非多样性的投资行为，

研究 $ExRM_c$ 能够使得现有风险度量体系更完整地描述市场中的投资行为。关于性质 12 中的投资非多样性性质在现实的决策背景下也有着重要意义，即投资者在积极决定最佳投资策略时，可以在无风险资产(或现金持有)和风险资产之间进行选择，只要该资产的组成结构不会因交易而改变。

此外，对于监管机构而言，他们通过监管测试敦促银行真正将风险评估用于内部风险管理的目的。当银行面临关于信用风险承担与现金持有之间的典型商业决策时，受 $ExRM_c$ 调控的银行要么不发放任何新贷款，要么全部选择信贷。这种决策具有重要的现实意义：当银行认为当前的市场环境或经济状况存在较大的不确定性或风险，选择不发放任何新贷款来避免潜在的损失；当银行认为市场或经济状况相对稳定，并且对借款人的信用风险有较高的信心，选择发放全部信贷以获取更多的收益。总之，监管机构通过监管测试来确保银行真正将风险评估用于内部风险管理的目的，而 $ExRM_c$ 作为一种风险度量方法，可以帮助银行在面临信用风险承担与现金持有之间的典型商业决策时做出合理的决策。

5. 结语

传统的期望效用理论仅对风险厌恶投资者的投资行为做了量化解释，但是在真实的金融市场中，许多投资者的风险偏好是风险喜爱的。为了解决决策理论中的风险喜爱随机优化问题，本文在熵风险度量的基础上，提出了性质良好的 Extropy 风险度量，通过对它的对偶表示形式与 Kusuoka 表示形式的研究，证实了它是一个能为风险喜爱投资者提供合理量化风险工具的风险度量。最后，将 Extropy 风险度量及其一些主要结果应用于风险喜爱的随机优化问题，发现它不仅考虑了风险与收益的权衡，与随机比较中的 3 阶递增凸序一致，而且能很好地解释金融市场中部分投资者非多样性的决策行为，弥补传统期望效用中的风险度量不能有效地指导风险喜爱投资者投资行为的不足。

基金项目

国家自然科学基金项目(12071436, 11701518)。

参考文献

[1] Markowitz, H.M. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

[2] 魏冰月. MCVaR 风险度量在投资理论中的应用[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江理工大学, 2021.

[3] 杨朝军, 周仕盈, 丁专鑫, 等. 资产配置中投资者风险偏好的量化——兼论长短期风险偏好的关联[J]. 中国管理科学, 2022, 30(6): 11-21.

[4] 殷岳. 基于相对熵的风险度量的随机优化[D]: [硕士学位论文]. 扬州: 扬州大学, 2021.

[5] Rachev, S.T., Stoyanov, S.V. and Fabozzi, F.J. (2011) A Probability Metrics Approach to Financial Risk Measures. John Wiley & Sons, Hoboken. https://doi.org/10.1002/9781444392715

[6] Föllmer, H. and Schied, A. (2011) Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time. Walter de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110218053

[7] Wei, P. (2021) Risk Management with Expected Shortfall. *Mathematics and Financial Economics*, **15**, 847-883. https://doi.org/10.1007/s11579-021-00298-x

[8] Wang, R. and Zitikis, R. (2021) An Axiomatic Foundation for the Expected Shortfall. *Management Science*, **67**, 1413-1429. https://doi.org/10.1287/mnsc.2020.3617

[9] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., *et al*. (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203-228. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068

[10] Ahmadi-Javid, A. (2012) Addendum to: Entropic Value-at-Risk: A New Coherent Risk Measure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **155**, 1124-1128. https://doi.org/10.1007/s10957-012-0014-9

[11] Ahmadi-Javid, A. (2012) Entropic Value-at-Risk: A New Coherent Risk Measure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **155**, 1105-1123. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9968-2

[12] Delbaen, F., Grandits, P., Rheinländer, T., *et al*. (2002) Exponential Hedging and Entropic Penalties. *Mathematical*

Finance, **12**, 99-123. https://doi.org/10.1111/1467-9965.02001

[13] 杨继平，王中魁. 基于期望效用-熵风险度量的决策者风险态度[J]. 北京航空航天大学学报：社会科学版，2010, 23(5): 53-56.

[14] 文秘，李伟兵. 基于熵风险度量的混合期望效用模型研究[J]. 舰船电子工程, 2013, 33(8): 101-103.

[15] Shannon, C. (1948) A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x

[16] Lad, F., Sanfilippo, G. and Agro, G. (2015) Extropy: Complementary Dual of Entropy. *Statistical Science*, **30**, 40-58. https://doi.org/10.1214/14-STS430

[17] Acerbi, C. (2004) Coherent Representations of Subjective Risk Aversion. In: Szegö, G., Ed., *Risk Measures for the* 21*st Century*, Wiley, New York, 147-207.

[18] Föllmer, H. and Schied, A. (2002) Convex Measures of Risk and Trading Constraints. *Finance and Stochastics*, **6**, 429-447. https://doi.org/10.1007/s007800200072

[19] Dentcheva, D., Penev, S. and Ruszczyński, A. (2010) Kusuoka Representation of Higher Order Dual Risk Measures. *Annals of Operations Research*, **181**, 325-335. https://doi.org/10.1007/s10479-010-0747-5

[20] Zou, Z., Wu, Q., Xia, Z., *et al*. (2023) Adjusted Rényi Entropic Value-at-Risk. *European Journal of Operational Research*, **306**, 255-268. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.08.028

[21] Pichler, A. and Schlotter, R. (2020) Entropy Based Risk Measures. *European Journal of Operational Research*, **285**, 223-236. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.01.016

[22] Haezendonck, J. and Goovaerts, M. (1982) A New Premium Calculation Principle Based on Orlicz Norms. *Insurance: Mathematics and Economics*, **1**, 41-53. https://doi.org/10.1016/0167-6687(82)90020-8

[23] Bellini, F., Laeven, R.J.A. and Gianin, E.R. (2021) Dynamic Robust Orlicz Premia and Haezendonck-Goovaerts Risk Measures. *European Journal of Operational Research*, **291**, 438-446. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.08.049

[24] Kusuoka, S. (2001) On Law Invariant Coherent Risk Measures. In: Kusuoka, S. and Maruyama, T., Eds., *Advances in Mathematical Economics*, Springer, Berlin, 83-95. https://doi.org/10.1007/978-4-431-67891-5_4

[25] Frittelli, M. and Gianin, E.R. (2005) Law Invariant Convex Risk Measures. In: Kusuoka, S. and Yamazaki, A., Eds., *Advances in Mathematical Economics*, Springer, Berlin, 33-46. https://doi.org/10.1007/4-431-27233-X_2

[26] Ogryczak, W. and Ruszczyński, A. (2001) On Consistency of Stochastic Dominance and Mean-Semideviation Models. *Mathematical Programming*, **89**, 217-232. https://doi.org/10.1007/PL00011396

[27] Pflug, G. and Wozabal, D. (2007) Ambiguity in Portfolio Selection. *Quantitative Finance*, **7**, 435-442. https://doi.org/10.1080/14697680701455410

[28] Krätschmer, V., Schied, A. and Zähle, H. (2012) Qualitative and Infinitesimal Robustness of Tail-Dependent Statistical Functionals. *Journal of Multivariate Analysis*, **103**, 35-47. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2011.06.005

[29] Shaked, J. and Shanthikumar, S. (2007) Stochastic Orders. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-34675-5

[30] Menezes, C., Geiss, C. and Tressler, J. (1980) Increasing Downside Risk. *The American Economic Review*, **70**, 921-932.

[31] Arrow, K.J. (1965) Aspects of the Theory of Risk-Bearing.

[32] Pratt, J.W. (1978) Risk Aversion in the Small and in the Large. In: Diamond, P. and Rothschild, M., Eds., *Uncertainty in Economics*, Academic Press, Cambridge, 59-79. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-214850-7.50010-3

[33] Brandtner, M., Kürsten, W. and Rischau, R. (2018) Entropic Risk Measures and Their Comparative Statics in Portfolio Selection: Coherence vs. Convexity. *European Journal of Operational Research*, **264**, 707-716. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.07.007