Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3749-3761
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312388

张量互补问题解集的一些性质

李雪艳

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月22日；发布日期：2023年12月29日

摘　要

张量互补问题成为现如今张量理论研究的热点课题之一，其主体结构为各种结构结构张量的性质及其与张量互补问题的相互联系，从而得到互补问题解集的性质。在这篇论文中，我们主要研究了列充分张量的部分性质。讨论列充分张量对角元素的特性。该研究将列充分的性质从矩阵扩展到张量。同时通过引入辅助矩阵，得到偶阶行对角张量互补问题与线性互补问题之间的关系，将张量互补问题解集的有限性和唯一性与其对应的辅助矩阵和主化矩阵互补问题的有限性和唯一性相联系。

关键词

列充分张量，辅助矩阵，张量互补问题

Some Prooreties of Solution Sets for Tensor Complementarity Problems

Xueyan Li

College of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 22nd, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

The problem of tensor complementarity has become one of the hot topics in tensor theory. Its main structure is the properties of various structural tensors and their interrelation with the tensor complementation problem, so as to obtain the properties of the solution set of the complementary problem. In this paper, we mainly study the partial properties of column sufficient tensors. Discuss the properties of diagonal elements of column sufficient tensors. This study extends the properties of column sufficient from matrices to tensors. At the same time, by introducing auxiliary matrix, we get the relationship between even order row diagonal tensor complementarity problem and linear complementarity problem. The finiteness and uniqueness of the tensor com-

文章引用: 李雪艳. 张量互补问题解集的一些性质[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3749-3761.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312388

plementarity problem are related to the finiteness and uniqueness of its corresponding auxiliary matrix and principal matrix complementarity problem.

Keywords

Column Sufficient Tensors, The Auxiliary Matrix, Tensor Complementarity Problems

1. 引言

张量互补问题是一类涉及函数由张量定义的非线性互补问题，它也是线性互补问题的自然推广。Song 和 qi [1]将线性互补问题推广到张量互补问题，这是一类特殊的非线性互补问题，用 $\mathrm{TCP}(q,\mathcal{A})$ 表示：找一 $x \in R^n$ ，使得

$$\mathrm{TCP}(q,\mathcal{A}): x \geq 0,\ q + Ax^{m-1} \geq 0, x^{\mathrm{T}}\left(q + Ax^{m-1}\right) = 0 .$$

对每一个 $q \in R^n$ ，都有解。

众所周知，线性互补问题在工程和经济学中有着广泛而重要的应用(Cottle 等[2]和 Han 等[3])。张量互补问题是受结构化张量研究的启发，从张量界中涌现出来的一个新课题，是 LCP 的自然推广。毫无疑问，各种结构张量的性质在张量互补问题的研究中发挥了重要作用[4] [5] [6] [7] [8]。近年来，随着人们对多线性代数资产的兴趣逐渐集中在高阶张量[1]上，越来越多的特殊矩阵被扩展到高阶结构张量[9] [10] [11] [12]。正半定对称张量由 Song 在[13]引入，证明了对称情况下(严格)半正张量和(严格)协正张量之间的等价性。Song 等在[1]中研究了 R0 张量，证明了 $\mathcal{A}$ 是 R0 张量当且仅当 $\mathrm{TCP}(0,\mathcal{A})$ 只有零解。了 $\mathcal{A}$ 是 R 张量当且仅当 $\mathrm{TCP}(e,\mathcal{A})$ 只有唯一解。Song 和 qi [14]中研究了列充分张量构成了广泛的张量，其中包括作为特殊情况的正半定张量。给出了列充分张量的继承性和不变性。然后给出了对称列充分张量的各种谱性质。证明了偶阶对称列充分张量的所有 h 特征值都是非负的，其所有 z 特征值在奇阶情况下都是非负的。在此基础上，定义了列充分张量的一个新子类和张量的残差。证明张量属于子类当且仅当它的残差是有限数。Luo 等[15]提出了 z 张量，研究了具有 z 张量 $\mathrm{TCP}(q,\mathcal{A})$ 的最稀疏解及其计算方法。Palpandi [16]将非退化矩阵的概念推广到张量，然后研究了非退化张量互补问题解集的有限性质。当张量互补问题的涉及张量是秩一对称张量的正线性组合时，我们证明了张量互补问题的解集是凸的，当张量正半定时，张量互补问题具有全局唯一性可解的性质。最后，研究了带附加条件的对称 P 张量具有全局唯一性可解的性质。

在线性互补问题(LCP)理论中，Cottle 等[17]引入列充分矩阵来研究 LCP 解集的凸性。这个矩阵类及其子类已经被研究了几十年，因为它是科学计算、复杂性理论和数学中很流行线性互补问题的理论基础。Cottle，Richard W [18]给出了列充分矩阵的一些基本性质。建立 PPM 所需的一些不变性定理。给出了具有行充分矩阵的 lcp 的主旋转方法。Valiaho [19]利用主枢轴研究了列充分矩阵新的判别矩阵类的准则，并与已有的准则进行了比较。

列充分张量作为特殊结构张量的一大类，在偶阶对称的条件下，它包括了 Hilbert 张量，对角占优的非负对角项张量，B 张量，二重 B 张量，拟二重 B 张量，非负对角项 H 张量，P 张量，强 Hankel 张量，

m 张量，和正柯西张量等结构化张量。所以其性质和应用具有很高的研究价值。为了更好地理解结构张量，丰富张量互补问题的理论，受到线性互补问题中列充分矩阵研究的启发[17] [20] [21]，本文对列充分张量进行了研究，同时与张量互补问题相联系，利用结构张量的性质，可以在张量互补问题上得到了许多好的结果。本文通过引入辅助矩阵，得到偶阶行对角张量互补问题与线性互补问题之间的关系。

本文主要结构如下：在第 2 节中，我们给出了部分预备知识。在第 3.1 节中，我们研究了列充分张量的部分性质。讨论列充分张量对角元素的特性。在第 3.2 节中，我们研究了张量的性质以及 $\mathrm{TCP}(q,\mathcal{A})$ 解的性质。在这种情况下，我们考虑了辅助矩阵的形成。考虑了非退化张量与非退化矩阵的关系，讨论辅助矩阵为非退化矩阵，则对应张量是否为非退化张量。辅助问题的解集有限，则对应张量互补问题的解集是否有限。还将张量互补问题解集的有限性和唯一性与其对应的辅助矩阵和主化矩阵互补问题的有限性和唯一性相联系。讨论其等价性。

2. 预备知识

我们首先介绍本文中使用的一些基本符号。我们考虑有实数的张量、矩阵和向量。对于正整数 n，$[n]$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$；R^n 表示 n 维欧氏空间；我们用 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\cdots$ 表示张量，$A,B,C,\cdots$ 表示矩阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\cdots$ 表示向量，$x,y,z,\cdots$ 表示实数。$|x|$定义为向量 $(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)^{\mathrm{T}}$；$T_{m,n}$ 为 m 维 n 阶实张量集合；单位张量 $\mathcal{I}_m=(\delta_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$，定义为 $R^n=\{x\in R^n: x\geq 0\}$；$\delta_{i_1\cdots i_m}=\begin{cases}1 \ : \ i_1=\cdots=i_m \\ 0 \ : \ \text{其他}\end{cases}$。

对于 $x\in R^n$，$\mathcal{A}\in T_{m,n}$，$\mathcal{A}x^{m-1}\in R^n$ 定义为

$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i=\sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ii_2i_3\cdots i_m}x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}$，对于所有 $i\in[n]$。

且 $A\boldsymbol{x}^m\in R$，定义为

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}^{m-1}=\mathcal{A}\boldsymbol{x}^m=\sum_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n} a_{i_1i_2i_3\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}.$$

定义 2.1 ([6])令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，我们定义

$$\psi_{\mathcal{A}}(x):R^n\mapsto R^n:\psi_{\mathcal{A}}(x)=x*(\mathcal{A}x^{m-1})$$

其中*为 Hadamard 积，定义为 $(u*v)_i=(u_i\cdot v_i)$。

定义 2.2 ([6]) (i) 令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，对任意 $x\in R^n\setminus\{0\}$，存在

$$i\in[n]\text{ 使得 } x_i\neq 0 \text{ 且 } x_i(\mathcal{A}x^{m-1})_i>(\geq 0).$$

我们称 $\mathcal{A}$ 为 $P(P_0)$ 张量。

([21]) (ii) 令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，若 $\mathcal{A}$ 所有非对角元素非正，即，

$$a_{i_1\cdots i_m}\leq 0 \text{ 其中 } \delta_{i_1\cdots i_m}=0.$$

我们称 $\mathcal{A}$ 为 z 张量。

([22]) (iii) 令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，若 $x\in R^n$，满足

$$x_i(\mathcal{A}x^{m-1})_i\leq 0,\forall i\in[n]\Rightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}=0,\forall i\in[n].$$

我们称 $\mathcal{A}$ 为列充分*张量。

([23]) (iv) 令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，$M(\mathcal{A})$ 为一 $n\times n$ 矩阵，其元素为

$$M(\mathcal{A})_{ij}=a_{ijj\cdots j} \text{ 其中 } i,j=1,2,\cdots,n.$$

我们称 $M(\mathcal{A})$ 为张量 $\mathcal{A}$ 的主控矩阵。

([16]) (v) 令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，若 $x\in R^n$，满足

$$x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0,\forall i\in[n]\Rightarrow x=0.$$

我们称 $\mathcal{A}$ 为非退化张量。

([16]) (vi) 令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，若 $x\in R^n$，满足

$$x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i\le 0,\forall i\in[n]\Rightarrow x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0,\forall i\in[n].$$

我们称 $\mathcal{A}$ 为列充分张量.

定义 2.3 ([22])令 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$， $N=\begin{pmatrix}m+n-2\\n-1\end{pmatrix}$，给一个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$， $y=(y_1,\cdots,y_n,y_{n+1},\cdots,y_N)\in R^N$ 使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}=A\boldsymbol{y},A\in R^{n\times N}.$$

这里每个 y_i 都被赋值到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的相应单项式中。则辅助矩阵定义为 $\bar{A}=\begin{pmatrix}A\\O\end{pmatrix}$，其中 O 为 $(N-n)\times N$ 的零矩阵。对于 $\boldsymbol{q}\in R^n$，构建

$$\bar{\boldsymbol{q}}\in R^N\text{，其中 }\bar{q}_i=\begin{cases}q_i; & \forall i\in[n]\\0; & \forall i\in[N]\setminus[n]\end{cases}$$

则：

$$\bar{\boldsymbol{q}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\0\end{pmatrix}.$$

其中 **0** 为 $(N-n)$ 阶零向量。那么，$\mathrm{LCP}(\bar{q},\bar{A})$ 为：找一个 $y,w\in R^N$，使得

$$\boldsymbol{y}\ge 0,\quad w=\bar{A}\boldsymbol{y}+\bar{q}\ge 0,\quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}w=0.$$

$\mathrm{LCP}(\bar{q},\bar{A})$ 被称为 $\mathrm{TCP}(q,\mathcal{A})$ 的辅助问题。

定义 2.4 ([24])设 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$， $\mathcal{A}$ 称为行对角张量，当且仅当 $\mathcal{A}=M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m$，其中 $\mathcal{I}_m$ 为 m 维 n 阶单位张量。

引理 2.5 ([23])设 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$， $\mathcal{A}$ 且为偶阶行对角张量，则以下结论等价：

$\mathcal{A}$ 为非退化张量。

$M(\mathcal{A})$ 为非退化矩阵。

$M(\mathcal{A})$ 具有有限性质。

$\mathcal{A}$ 具有有限性质。

引理 2.6 ([2]定理 3.6.3)设 $A\in R^{n\times n}$，则以下等价：

A 为非退化矩阵。

对 $q\in R^n$， $\mathrm{LCP}(q,A)$ 的解为有限集(可能为空)。

3. 主要结论

3.1. 列充分张量

定理 3.1 若 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，为列充分张量，则 $\mathcal{A}$ 的行对角元素非负。

证明. 令 $\mathcal{A}$ 为一列充分张量 假设存在 $k\in[n]$，使得

$$a_{kk\cdots k}<0,$$

设 $x=e^{(k)}$，则

$$\left(\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\right)_k=a_{kk\cdots k}.$$

这表明

$$x_k\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_k\le 0.$$

因为 $\mathcal{A}$ 是列充分的，所以

$$x_k\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_k=0.$$

那么

$$\mathcal{A}x^{m-1}=0.$$

但是

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_k<0.$$

与条件矛盾，

所以 $a_{kk\cdots k}\ge 0$。得证。

3.2. 辅助矩阵

3.2.1. 辅助矩阵的相关结果

定理 3.2 让 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$，m 为偶数，若 $\bar{A}$ 是非退化矩阵，则 $\mathcal{A}$ 为非退化张量。

证明. 令 $\bar{A}$ 为一非退化矩阵，则对于

$$y\in R^N,y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0,\forall i\in[N]\quad\Rightarrow\quad y=0\,.$$

对于

$$x\in R^n,x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)=0,\forall i\in[n]\Rightarrow x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0,\forall i\in[N].$$

因为 $\bar{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的辅助矩阵，所以对于所有的 $y\in R^n$，我们可以得到

$$y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0\,,$$

使得

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=\left(Ay\right)_i \text{且 } y_i\left(Ay\right)_i=x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i,$$

因此：

$$x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0\Leftrightarrow y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0,\forall i\in[n].$$

根据 $\bar{A}$ 的定义我们有

$$y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0,\forall i\in[N]\setminus[n].$$

所以我们可得到

$$y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0,\forall i\in[N].$$

由于 $\bar{A}$ 是非退化的，则有

$$y=0\,.$$

即

$$x_i^{m-1}=0,\forall i\in[n].$$

可得 $x=0$ 。所以 $\mathcal{A}$ 为非退化张量。

以上结论反推不一定成立。可由以下例子得出。

例 1 $\mathcal{A}=a_{i_1i_2i_3}\in T_{3,2}$，$a_{111}=1$，$a_{112}=1$，$a_{212}=1$，$a_{222}=-1$，其余元素为 0。则 Ax^2 是 x_1,x_2 的 2 次齐次多项式。

$$\mathcal{A}x^2=\begin{pmatrix}x_1^2+x_1x_2\\-x_2^2+x_1x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^2\\x_2^2\\x_1x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

其中 $y_1=x_1^2,y_2=x_2^2,y_3=x_1x_2$ 。

$$x^{\mathrm{T}}\mathcal{A}x^2=\begin{pmatrix}x_1^3+x_1^2x_2\\-x_2^3+x_1x_2^2\end{pmatrix}$$

当

$$x_i\left(\mathcal{A}x^2\right)_i=0\text{ 。}$$

即

$$\begin{cases}x_1^3+x_1^2x_2=0\Rightarrow x_1=0\text{ 或 }x_1=-x_2\\x_2^2x_1-{x_2}^3=0\Rightarrow x_2=0\text{ 或 }x_2=x_1\end{cases}$$

1) $x_1=0,x_2=0$，此时 $x_1=x_2=0$ 。
2) $x_1=0,x_2=x_1$，此时 $x_1=x_2=0$ 。
3) $x_2=0,x_2=-x_1$，此时 $x_1=x_2=0$ 。
4) $x_1=-x_2,x_2=x_1$，此时 $x_1=x_2=0$ 。

所以 $\mathcal{A}$ 为非退化张量。

现在我们构建：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

则

$$y^{\mathrm{T}}\bar{A}y=\begin{pmatrix}y_1^2+y_1y_3\\-y_2^2+y_2y_3\\0\end{pmatrix}.$$

当 $y=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 时， $y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0$ 。此时 $\bar{A}$ 不是非退化矩阵。

定理 3.3 若 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$ 且 $q\in R^n$ ， $\mathrm{LCP}\left(\bar{q},\bar{A}\right)$ 是 $\mathrm{TCP}\left(q,\mathcal{A}\right)$ 问题对应的辅助问题，若 $\mathrm{LCP}\left(\bar{q},\bar{A}\right)$ 的解集有限对 $\bar{q}\in R^N$ ，则 $\mathrm{TCP}\left(q,\mathcal{A}\right)$ 的解集有限。

证明。$\mathrm{SOL}\left(\bar{q},\bar{A}\right)=\left\{y\in R^N: y\ge 0, w=\bar{A}y+\bar{q}\ge 0, y^{\mathrm{T}}w=0\right\}$ 的解集有限(可能为 0)。即：

$$\left\{y: y\in \mathrm{SOL}\left(\bar{q},\bar{A}\right)\right\}$$

为有限集。假设 $\mathrm{TCP}\left(q,\mathcal{A}\right)$ 的解集无限，则对所有的 $q\in R^n$ ，
存在序列 $\left\{\omega^k\right\}$，使得 $x^k\in \mathrm{SOL}\left(q,\mathcal{A}\right)$，
对每一

$$x^k\in \mathrm{SOL}\left(q,\mathcal{A}\right)\text{我们有 } y^k\in R^N\text{，}\quad y^k\in \mathrm{SOL}\left(\bar{q},\bar{A}\right).$$

那么， $\mathrm{LCP}\left(\bar{q},\bar{A}\right)$ 的解集无限，矛盾。所以， $\mathrm{TCP}\left(q,\mathcal{A}\right)$ 的解集有限。

定理 3.4 让 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$ ， m 为偶数，若 $\bar{A}$ 是列充分矩阵，则 $\mathcal{A}$ 为列充分张量。

证明。$\bar{A}$ 为一列充分矩阵，则对于

$$y\in R^N, y_i\left(\bar{A}y\right)_i\le 0, \forall i\in[N]\ \Rightarrow y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0.$$

因为 m 为偶数，则对于

$$x\in R^n, x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i\le 0, \forall i\in[n]\text{。我们有 } x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i\le 0, \forall i\in[n].$$

因为 $\bar{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的辅助矩阵，所以对于所有的 $y\in R^n$ ，我们有

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=\left(\bar{A}y\right)_i\text{ 且 } y_i\left(\bar{A}y\right)_i=x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i.$$

所以

$$x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i\le 0\Leftrightarrow y_i\left(\bar{A}y\right)_i\le 0, \forall i\in[n]\text{。}$$

根据 $\bar{A}$ 的定义我们有

$$y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0, \forall i\in[N]\backslash[n].$$

所以我们可得到

$$y_i\left(\bar{A}y\right)_i\le 0, \forall i\in[N]\Rightarrow y_i\left(\bar{A}y\right)_i=0.$$

那么

$$x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i\le 0, \forall i\in[n]\Rightarrow x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0.$$

所以 $\mathcal{A}$ 为列充分张量。

例 2 $\mathcal{A}=a_{i_1i_2i_3i_4}\in S_{4,2}$ ， $a_{1111}=a_{2222}=1$ ， $a_{1222}=a_{2111}=-1$ ， $a_{1121}=3$ ， $a_{1112}=-2$ ， $a_{1211}=-1$ ，其余元素为 0。则 Ax^3 是 x_1,x_2 的 3 次齐次多项式。

$$\mathcal{A}x^3=\begin{pmatrix}1\cdot x_1^3+-1\cdot x_2^3+0\cdot x_1^2x_2+0\cdot x_1x_2^2\\ -1\cdot x_1^3+1\cdot x_2^3+0\cdot x_1^2x_2+0\cdot x_1x_2^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^3\\x_2^3\\x_1^2x_2\\x_1x_2^3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

其中

$$y_1=x_1^3,y_2=x_2^3,y_3=x_1^2x_2\text{ 且 }y_4=x_1x_2^2.$$

令

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

对于

$$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}},$$

我们有

$$\mathcal{A}x^3=Ay.$$

现在我们构建：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

则：

$$M(\mathcal{A})=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\text{ 且 }B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

因为

$$x^{\mathrm{T}}M(\mathcal{A})x=\begin{pmatrix}x_1^2-x_1x_2\\x_2^2-x_1x_2\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{cases}x_1^2-x_1x_2\le 0\Rightarrow x_1\le 0,x_1\ge x_2\text{ 或 }x_1\ge 0,x_1\le x_2\\ x_2^2-x_1x_2\le 0\Rightarrow x_2\le 0,x_2\ge x_1\text{ 或 }x_2\ge 0,x_2\le x_1\end{cases}$$

(1) $x_1\le 0,x_2\le 0$，此时 $x_1\ge x_2$ 且 $x_1\le x_2\Rightarrow x_1=x_2$。

(2) $x_1\le 0,x_2\ge 0$，此时 $x_1\ge x_2\Rightarrow x_1=x_2=0$。

(3) $x_1\ge 0,x_2\le 0$，此时 $x_1\le x_2$ 且 $x_1\ge x_2\Rightarrow x_1=x_2$。

(4) $x_1 \ge 0, x_2 \le 0$，此时 $x_1 \le x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$。

综上，当 $x_1 = x_2$ 时，

$$x_i M(\mathcal{A}) x_i \le 0, \forall i \in [2] \Rightarrow x_i M(\mathcal{A}) x_i = 0, \forall i \in [2].$$

则 $M(\mathcal{A})$ 为列充分矩阵，$\bar{A}$ 为列充分张量，同时，

$$x\mathcal{A}x^3 = \begin{pmatrix} x_1^4 - x_1 x_2^3 \\ -x_1^3 x_2 + x_2^4 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{cases} x_1^4 - x_1 x_2^3 \le 0 \Rightarrow x_1 \le 0, x_1^3 \ge x_2^3 \text{ 或 } x_1 \ge 0, x_1^3 \le x_2^3 \\ x_2^2 - x_1 x_2 \le 0 \Rightarrow x_2 \le 0, x_2^3 \ge x_1^3 \text{ 或 } x_2 \ge 0, x_2^3 \le x_1^3 \end{cases}$$

(1) $x_1 \le 0, x_2 \le 0$，此时 $x_1^3 \ge x_2^3$ 且 $x_1^3 \le x_2^3 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$。

(2) $x_1 \le 0, x_2 \ge 0$，此时 $x_1^3 \ge x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$。

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \le 0$，此时 $x_1^3 \le x_2^3$ 且 $x_1^3 \ge x_2^3 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$。

(4) $x_1 \ge 0, x_2 \le 0$，此时 $x_1^3 \le x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$。

综上，当 $x_1 = x_2$ 时，

$$x_i \mathcal{A} x_i^3 \le 0, \forall i \in [2] \Rightarrow x_i \mathcal{A} x_i^3 = 0, \forall i \in [2].$$

所以 $\mathcal{A}$ 为列充分张量。

3.2.2. 偶数阶行对角张量的辅助问题

下面我们考虑 $\mathcal{A}$ 的主子矩阵 $M(\mathcal{A})$，很容易得到 $A = \begin{pmatrix} M(\mathcal{A}) & B \end{pmatrix}$ 对于一些 $B \in R^{(N-n)\times(N-n)}$ 且 $\bar{A} = \begin{pmatrix} M(\mathcal{A}) & B \\ O & O \end{pmatrix}$。

根据引理 2.5 我们可知：对于偶数阶行对角张量而言，若其主子矩阵的线性互补问题解集具有有限性，则对应的张量互补问题解集也具有有限性。我们在这里给出这个结果的另一个证明，以使论文自成一体。

定理 3.6 $\mathcal{A} \in T_{m,n}$ 是偶数阶行对角张量，辅助矩阵 $\bar{A}$ 的形式为 $\bar{A} = \begin{pmatrix} M(\mathcal{A}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

则以下结论等价：

$M(\mathcal{A})$ 是非退化矩阵。(b) $\mathcal{A}$ 是非退化张量。(c) $\mathrm{TCP}(q, \mathcal{A})$ 有有限解集

证明。(a) $\Rightarrow$ (b)

令 $\mathcal{A}$ 是行对角张量，则 $\mathcal{A} = M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m$，且

$$\mathcal{A}x^{m-1} = M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m x^{m-1} = M(\mathcal{A})y,$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 且 $y = x^{[m-1]} = \left(x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, \cdots, x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$。

令 $M(\mathcal{A})$ 为非退化矩阵，则

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i = x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i = 0 \quad \forall i \in [n] \Rightarrow x\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right) = 0 \Rightarrow y\left(\mathcal{A}y^{m-1}\right) = 0。$$

$x \in R^n$ 我们有

$$x_i\left(\bar{A}x\right)_i = 0,$$

因为 m 为偶数，所以存在

$$y = x^{m-1} = \left(x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, \cdots, x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

使得

$$x_i^{m-1}\left(M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m x^{m-1}\right)_i = y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i = x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i .$$

所以

$$x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i = y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i = 0 \quad \forall i \in [n] \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

所以 $\mathcal{A}$ 为非退化张量。

(b) $\Rightarrow$ (a)

令 $\mathcal{A}$ 是行对角张量，则 $\mathcal{A} = M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m$，且

$$\mathcal{A}x^{m-1} = M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m x^{m-1} = M(\mathcal{A})y ,$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 且 $y = x^{[m-1]} = \left(x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, \cdots, x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$。

令 $\mathcal{A}$ 为一非退化张量，那么

$$x_i\left(\bar{A}x\right)_i = 0, \forall i \in [N] \quad \Rightarrow \quad x = 0 .$$

假设对于一部分 $y \in R^n$ 找们有

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i = 0 .$$

因为 m 为偶数，所以存在

$$x = y^{\left[\frac{1}{m-1}\right]} = \left(y_1^{\frac{1}{m-1}}, y_2^{\frac{1}{m-1}}, \cdots, y_n^{\frac{1}{m+1}}\right)^{\mathrm{T}} .$$

使得：

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i = x_i^{m-1}\left(M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m x^{m-1}\right)_i = x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i .$$

所以

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i = x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i = 0 \quad \forall i \in [n] \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 .$$

所以 $M(\mathcal{A})$ 是非退化矩阵。

(a) $\Rightarrow$ (c)

令 $\mathcal{A}$ 是行对角张量，则 $\mathcal{A} = M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m$，且

$$\mathcal{A}x^{m-1} = M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m x^{m-1} = M(\mathcal{A})y$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 且 $y = x^{[m-1]} = \left(x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, \cdots, x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$。

所以 $\mathrm{TCP}(q, A)$ 等价于

$$\mathrm{LCP}\left(\bar{q}, M(\mathcal{A})\right) = \left\{y \in R^N : y \ge 0, M(\mathcal{A})y + \bar{q} \ge 0, y^{\mathrm{T}}\left(M(\mathcal{A})y + \bar{q}\right) = 0\right\}.$$

由于 $M(\mathcal{A})$ 是非退化矩阵，可得 $\mathrm{LCP}\left(\bar{q}, M(\mathcal{A})\right)$ 有有限解集。所以 $\mathrm{TCP}(q, A)$ 有有限解集。

(c) $\Rightarrow$ (a)

$\mathcal{A}$ 是行对角张量且 $\mathrm{TCP}(q, A)$ 为有限解集，因为 $\mathrm{TCP}(q, A)$ 等价于

$$\mathrm{LCP}\left(\overline{q}, M(\mathcal{A})\right)=\left\{y \in R^{N}: y \geq 0, M(\mathcal{A}) y+\overline{q} \geq 0, y^{\mathrm{T}}\left(M(\mathcal{A}) y+\overline{q}\right)=0\right\}.$$

则 $\mathrm{LCP}\left(\overline{q}, M(\mathcal{A})\right)$ 为有限解集，由引理 2.6 可得 $M(\mathcal{A})$ 是非退化矩阵。

定理 3.7 $\mathcal{A} \in T_{m,n}$ 是偶数阶行对角张量，辅助矩阵 $\overline{A}$ 的形式为 $\overline{A}=\begin{pmatrix} M(\mathcal{A}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

则以下结论等价：

(a) $M(\mathcal{A})$ 为列充分矩阵。(b) $\mathcal{A}$ 为列充分张量。

证明。(a) $\Rightarrow$ (b)

令 $\mathcal{A}$ 是行对角张量，则 $\mathcal{A}=M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m$，且

$$\mathcal{A}x^{m-1}=M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m x^{m-1}=M(\mathcal{A})y,$$

其中 $x=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^{\mathrm{T}}$ 且 $y=x^{[m-1]}=\left(x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, \cdots, x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$。

令 $\mathcal{A}$ 为一列充分张量，那么

$$x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i \leq 0, \forall i \in [n] \quad \Rightarrow \quad x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0, \forall i \in [n].$$

那么

$$x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i \leq 0, \forall i \in [n] \quad \Rightarrow \quad x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0, \forall i \in [n].$$

假设对于 $y \in R^n$ 我们有

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i \leq 0.$$

因为 m 为偶数，所以存在

$$x=y^{\left[\frac{1}{m-1}\right]}=\left(y_1^{\frac{1}{m-1}}, y_2^{\frac{1}{m-1}}, \cdots, y_n^{\frac{1}{m+1}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

使得：

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i=x_i^{m-1}\left(M(\mathcal{A})\mathcal{I}_m x^{m-1}\right)_i=x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i.$$

所以

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i=x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i \leq 0, \forall i \in [n] \Rightarrow y_i\left(\mathcal{A}y\right)_i=0, \forall i \in [n].$$

所以 $M(\mathcal{A})$ 是列充分矩阵。

(b) $\Rightarrow$ (a)

令 $M(\mathcal{A})$ 为列充分矩阵，则

$$y_i\left(M(\mathcal{A})y\right)_i=x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i \leq 0, \forall i \in [n] \Rightarrow x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=0 \Rightarrow y_i\left(\mathcal{A}y^{m-1}\right)_i=0.$$

假设对于 $x \in R^n$ 我们有

$$x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i \leq 0,$$

因为 m 为偶数，所以存在

$$y=x^{m-1}=\left(x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, \cdots, x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

使得

$$x_i^{m-1}\left(M\left(\mathcal{A}\right)\mathcal{I}_m x^{m-1}\right)_i = y_i\left(M\left(\mathcal{A}\right)y\right)_i = x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i .$$

所以

$$x_i^{m-1}\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i = y_i\left(M\left(\mathcal{A}\right)y\right)_i \le 0 \quad \forall i\in[n] \Rightarrow y_i\left(\mathcal{A}y^{m-1}\right)_i = 0 \Rightarrow x_i\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i = 0 .$$

所以 $\mathcal{A}$ 为列充分张量。

注： $\mathcal{A}\in T_{m,n}$ 是偶数阶行对角张量，辅助矩阵 $\bar{A}$ 的形式为 $\bar{A}=\begin{pmatrix} M\left(\mathcal{A}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

则 $M\left(\mathcal{A}\right)$ 为列充分矩阵 $\Rightarrow$ $\mathrm{TCP}\left(q,\mathcal{A}\right)$ 对任意 $q\ge 0$ 只有零解。

令 $\mathcal{A}$ 是行对角张量，则 $\mathcal{A}=M\left(\mathcal{A}\right)\mathcal{I}_m$，且

$$\mathcal{A}x^{m-1} = M\left(\mathcal{A}\right)\mathcal{I}_m x^{m-1} = M\left(\mathcal{A}\right)y$$

其中

$$x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}} \text{ 且 } y = x^{[m-1]} = \left(x_1^{m-1},x_2^{m-1},\cdots,x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}} 。$$

所以 $\mathrm{TCP}\left(q,A\right)$ 等价于

$$\mathrm{LCP}\left(\bar{q},M\left(\mathcal{A}\right)\right)=\left\{y\in R^N : y\ge 0, M\left(\mathcal{A}\right)y+\bar{q}\ge 0, y^{\mathrm{T}}\left(M\left(\mathcal{A}\right)y+\bar{q}\right)=0\right\}.$$

由于 $M\left(\mathcal{A}\right)$ 是列充分矩阵，可得 $\mathrm{LCP}\left(\bar{q},M\left(\mathcal{A}\right)\right)$ 对任意 $q\ge 0$ 只有零解。

所以 $\mathrm{TCP}\left(q,A\right)$ 任意 $q\ge 0$ 只有零解。

4. 结论

本文给出了列充分张量的一部分性质，证明了列充分张量的行对角元素是非负的。同时得到辅助矩阵与对应张量之间的关系，若辅助矩阵为非退化矩阵，则对应张量为非退化张量。辅助问题的解集有限，则对应张量互补问题的解集有限。进一步得到偶阶行对角张量互补问题与线性互补问题之间的关系，将张量互补问题解集的有限性和唯一性与其对应的辅助矩阵和主化矩阵互补问题的有限性和唯一性相联系。证明了其等价关系。那么，当辅助矩阵为 P 矩阵和强 P 矩阵时，与之对应的张量是否为 P 张量和强 P 张量呢？与之对应的张量互补问题是否具有与线性互补问题相关联的结论呢？

参考文献

[1] Song, Y. and Qi, L. (2014) Properties of Tensor Complementarity Problem and Some Classes of Structured Tensors.

[2] Cottle, R.W., Pang, J.-S. and Stone, R.E. (2009) The Linear Complementarity Problem. SIAM, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9780898719000

[3] Han, J., Xiu, N. and Qi, H. (2006) Nonlinear Complementarity Theory and Algorithm. Shanghai Science and Technology Press, Shanghai.

[4] Bai, X.-L., Huang, Z.-H. and Wang, Y. (2016) Global Uniqueness and Solvability for Tensor Complementarity Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **170**, 72-84. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0903-4

[5] Gowda, M.S., Luo, Z., Qi, L. and Xiu, N. (2015) Z-Tensors and Complementarity Problems.

[6] Luo, Z., Qi, L. and Xiu, N. (2017) The Sparsest Solutions to z-Tensor Complementarity Problems. *Optimization Letters*, **11**, 471-482. https://doi.org/10.1007/s11590-016-1013-9

[7] Song, Y. and Qi, L. (2015) Properties of Some Classes of Structured Tensors. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **165**, 854-873. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0616-5

[8] Song, Y. and Qi, L. (2016) Tensor Complementarity Problem and Semi-Positive Tensors. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **169**, 1069-1078. https://doi.org/10.1007/s10957-015-0800-2

[9] Chen, H., Huang, Z.-H. and Qi, L. (2017) Copositivity Detection of Tensors: Theory and Algorithm. *Journal of Opti-*

mization Theory and Applications, **174**, 746-761. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1131-2

[10] Chen, H. and Qi, L. (2014) Positive Definiteness and Semi-Definiteness of Even Order Symmetric Cauchy Tensors. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **11**, 1263-1274. https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.1263

[11] Chen, H. and Wang, Y. (2017) On Computing Minimal h-Eigenvalue of Sign-Structured Tensors. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 1289-1302. https://doi.org/10.1007/s11464-017-0645-0

[12] Chen, Z. and Qi, L. (2013) Circulant Tensors with Applications to Spectral Hypergraph Theory and Stochastic Process.

[13] Song, Y. and Qi, L. (2016) Tensor Complementarity Problem and Semi-Positive Tensors. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **169**, 1069-1078. https://doi.org/10.1007/s10957-015-0800-2

[14] Chen, H., Qi, L. and Song, Y. (2018) Column Sufficient Tensors and Tensor Complementarity Problems. *Frontiers of Mathematics in China*, **13**, 255-276. https://doi.org/10.1007/s11464-018-0681-4

[15] Luo, Z., Qi, L. and Xiu, N. (2017) The Sparsest Solutions to z-Tensor Complementarity Problems. *Optimization Letters*, **11**, 471-482. https://doi.org/10.1007/s11590-016-1013-9

[16] Palpandi, K. and Sharma, S. (2021) Tensor Complementarity Problems with Finite Solution Sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **190**, 951-965. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01917-9

[17] Cottle, R., Pang, J.-S. and Venkateswaran, V. (1989) Sufficient Matrices and the Linear Complementarity Problem. *Linear Algebra and Its Applications*, **114**, 231-249. https://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90463-1

[18] Väliaho, H. (1996) Criteria for Sufficient Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **233**, 109-129. https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)00058-1

[19] Cottle, R.W. (1989) The Principal Pivoting Method Revisited. Systems Optimization Lab., Technical Report, Stanford Univ., Stanford. https://doi.org/10.2172/6125051

[20] Sun, J. and Huang, Z.-H. (2006) A Smoothing Newton Algorithm for the LCP with a Sufficient Matrix That Terminates Finitely at a Maximally Complementary Solution. *Optimisation Methods and Software*, **21**, 597-615. https://doi.org/10.1080/10556780600627727

[21] Zhang, L., Qi, L. and Zhou, G. (2014) M-Tensors and Some Applications. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **35**, 437-452. https://doi.org/10.1137/130915339

[22] Dutta, A., Deb, R. and Das, A. (2022) On Some Properties of w-Uniqueness in Tensor Complementarity Problem.

[23] Pearson, K. (2010) Essentially Positive Tensors. *International Journal of Algebra*, **4**, 421-427.

[24] Qi, L. (2005) Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor. *Journal of Symbolic Computation*, **40**, 1302-1324. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2005.05.007