Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3742-3748
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312387

Hans汉斯

Gauss超几何函数关于参数的单调性

温佳乐，马晓艳*

浙江理工大学理学院，浙江 杭州

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月22日；发布日期：2023年12月29日

摘 要

本文给出了Gauss超几何函数$F(a,c-a;c;x)$和$F(a-1,c-a;c;x)$与初等函数组合函数的一类新的形式，研究这类形式下的组合函数关于参数a的单调性质。本文借助函数的级数展开表达式以及Psi函数、Gamma函数的递推公式，利用对数求导法给出了这类组合函数关于参数a的单调性的充分必要条件。

关键词

Gauss超几何函数，单调性，参数

Monotonicity Properties of Gaussian Hypergeometric Functions with Respect to the Parameter

Jiale Wen, Xiaoyan Ma*

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 22nd, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

This paper gives a new form of the combination of Gaussian hypergeometric functions $F(a,c-a;c;x)$, $F(a-1,c-a;c;x)$ and elementary functions, and studies the monotonicity of the new-form combination function with respect to the parameter a. This paper uses the series expansion expression of functions and the recurrence formulas of Psi and Gamma functions，as well as the logarithmic differentiation method to provide necessary and sufficient conditions for the monotonicity of the combination function with respect to the parameter a.

*通讯作者。

文章引用: 温佳乐, 马晓艳. Gauss 超几何函数关于参数的单调性[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3742-3748.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312387

Keywords

Gaussian Hypergeometric Function, Monotonicity, Parameter

1. 引言

令 $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$，其中 $\mathbb{N}$ 是正整数的集合。对任意的 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 并且 $c\neq 0,-1,-2,\cdots$，Gauss 超几何函数 $F(a,b;c;x)$ 定义为[1]：

$$F(a,b;c;x)={}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)n!}x^n\quad(|x|<1) \tag{1.1}$$

其中 (a,n) 是升阶乘多项式，定义为：

$$(a,n)=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},\quad n\in\mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

当 $a\neq 0$ 时，有 $(a,0)=1$。当 $a+b=c$ 时，称 $F(a,b;c;x)$ 为零平衡的。

Gauss 超几何函数与经典的 Gamma 函数 $\Gamma(x)$，Psi 函数 $\psi(x)$ 和 Beta 函数 $B(x,y)$ 紧密相关。令 $\operatorname{Re}x>0$ 和 $\operatorname{Re}y>0$，其定义分别为[1]：

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\quad B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad \psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

并且以上三类函数具有很多著名的性质如下式，见参考文献[1] [2]：

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)} \tag{1.3}$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{1.4}$$

$$\psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x} \tag{1.5}$$

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad a+b<c \tag{1.6}$$

$$F(a,b;a+b;x)\sim-\frac{1}{B(a,b)}\log(1-x),\quad x\to 1 \tag{1.7}$$

Gauss 超几何函数在数学领域的几何函数论、数论、拟共形理论等诸多分支中都起着重要的作用，另外它在物理学、工程技术等其他学科领域中也具有广泛的应用。最近，Gauss 超几何函数关于参数性质的研究已取得一些成果，见参考文献[3] [4] [5] [6]。2022 年鲍琪等在文献[7]中研究了 Gauss 超几何函数 $F(a,c-a;c;x)$ 和 $F(a-1,c-a;c;x)$ 与初等函数适当组合的四个函数关于参数 a 的单调性，并给出了单调的充分必要条件。接着，在文献[8]中又证明了零平衡的 Gauss 超几何函数 $F(a,b;a+b;r)$ 与初等函数组合函数关于参数 a 的单调性，得到了零平衡的 Gauss 超几何函数 $F(a,b;a+b;r)$ 关于参数 a 的性质。

受这些研究结果启发，本文研究了在拟共形理论以及物理学等领域出现的 Gauss 超几何函数的单调性质以及不等式性质，给出 Gauss 超几何函数新的单调定理和相关不等式(见如下定理 1.1.)，这些结果推广和改进了原有结果。

为了方便叙述，引入以下记号：

$$P_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k},$$

$$P_{1,n}(a,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,k)(c-a,k+1)}{(c,k+1)k!}x^{k+1},$$

$$P_{2,n}(\lambda,c,x)=\left(\frac{2}{c}\right)^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/2,n+1+k)(c/2,n+2+k)}{(c,n+2+k)(n+1+k)!}x^{n+2+k},$$

$$\bar{P}_{2,n}(c,x)=P_{2,n}(0,c,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/2,n+1+k)(c/2,n+2+k)}{(c,n+2+k)(n+1+k)!}x^{n+2+k}.$$

定理 1.1 对于常数 $c\in(0,\infty)$， $a\in(0,c/2]$， $\lambda\in\mathbb{R}$ 以及 $x\in(0,1)$，函数

$$f_{\lambda}(a)=\frac{F(a,c-a;c;x)-F(a-1,c-a;c;x)-P_{1,n}(a,x)}{a^{\lambda}}$$

在 $(0,c/2]$ 上严格单调上升(下降)当且仅当 $\lambda\le -c/(2n+2+c)$ (若 $c\in(0,1]$，$\lambda\ge 1$；若 $c\in(1,\infty)$，$\lambda\ge\lambda^{*}$，λ^{*} 见引理 5)，并且有

$$f_{\lambda}(0^{+})=\begin{cases}0, & \lambda<1,\\ P_n(x), & \lambda=1,\\ \infty, & \lambda>1,\end{cases}$$

$$f_{\lambda}\left(\frac{c}{2}\right)=P_{2,n}(\lambda,c,x)=\left(\frac{2}{c}\right)^{\lambda}\bar{P}_{2,n}(\lambda,c,x).$$

特别地，满足如下不等式

当 $c\in(0,1]$， $a\in(0,c/2]$， $\lambda\ge 1$ 以及 $x\in(0,1)$，有

$$(2a/c)\bar{P}_{2,n}(c,x)\le F(a,c-a;c;x)-F(a-1,c-a;c;x)-P_{1,n}(a,x)\le aP_n(x) \tag{1.8}$$

当 $c\in(0,\infty)$， $a\in(0,c/2]$， $\lambda\le -c/(2n+2+c)$ 以及 $x\in(0,1)$，有

$$0\le F(a,c-a;c;x)-F(a-1,c-a;c;x)-P_{1,n}(a,x)\le(2a/c)^{\lambda}\bar{P}_{2,n}(c,x) \tag{1.9}$$

当 $c\in(1,\infty)$， $a\in(0,c/2]$， $\lambda\ge\lambda^{*}$ 以及 $x\in(0,1)$，有

$$F(a,c-a;c;x)-F(a-1,c-a;c;x)-P_{1,n}(a,x)\ge(2a/c)^{\lambda}\bar{P}_{2,n}(c,x) \tag{1.10}$$

不等式(1.8)，(1.9)，(1.10)中等号成立当且仅当 $a=c/2$。

2. 预备知识

引理 2.1 [9]令 $-\infty<a<b<\infty$ 时，定义函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且有 $g'(x)\ne 0$。若函数 $f'(x)/g'(x)$ 在 (a,b) 上单调上升(下降)，那么函数

$$[f(x)-f(a)]/[g(x)-g(a)] \text{ 和 } [f(x)-f(b)]/[g(x)-g(b)]$$

在 (a,b) 上单调上升(下降)；若 $f'(x)/g'(x)$ 为严格单调，那么该函数也为严格单调。

引理 2.2 [10]对于 $n\in\mathbb{N}_0$ 时，令 r_n 和 s_n 都为实数，$R(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r_nx^n$ 和 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n$ 为 $|x|<1$ 时的收敛级数。若 $s_n\geq 0$ 且不全为零，r_n/s_n 关于 $n\in\mathbb{N}_0$ 严格单调上升(下降)，那么函数 $x\mapsto R(x)/S(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升(下降)。

引理 2.3 [7]对于实数 $c\in(0,\infty)$，令 $a\in(0,c/2]$ 且 $n\in\mathbb{N}_0$，定义 $a_n=\psi(n+a)-\psi(n+c-a)$，则有数列 $\{a_n\}$ 在 $n\in\mathbb{N}_0$ 上严格单调上升且有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

引理 2.4 [7]对于实数 $c\in(0,\infty)$，令 $a\in(0,c/2]$ 且 $n\in\mathbb{N}_0$，定义 $g_n(a)=(a,n)(c-a,n+1)$，则有数列 $\{g_n'(a)/g_n(a)\}$ 在 $n\in\mathbb{N}_0$ 上严格单调上升且有

$$\frac{g_n'(a)}{g_n(a)}=a_{n+1}-a_0-\frac{1}{n+a}.$$

引理 2.5 [7]对于实数 $c\in(0,\infty)$，令 $a\in(0,c/2]$，定义函数 $\lambda(a)=a\left[\psi(c-a)-\psi(a)\right]$，则有

$$\bar{\lambda}:=\sup_{a\in(0,c/2]}\{\lambda(a)\}=\begin{cases}1, & c\in(0,1],\\ \lambda^*, & c\in(1,\infty),\end{cases}$$

其中 $\lambda^*\geq 1$。

引理 2.6 对于实数 $c\in(0,\infty)$，$a\in(0,c/2]$ 且 $n\in\mathbb{N}_0$，令

$$\lambda_1(a,n)=a\left(a_{n+1}-a_0-\frac{1}{n+1+c-a}\right),$$

则有 $\tilde{\lambda}_1:=\inf_{a\in(0,c/2]}\{\lambda_1(a,n)\}=-c/(2n+2+c)$。

证明：首先，根据引理 2.3 可以得到

$$\begin{aligned}\lambda_1(a,n)&\geq a\left(a_1-a_0-\frac{1}{n+1+c-a}\right)\\&=a\left(\psi(1+a)-\psi(1+c-a)+\psi(c-a)-\psi(a)-\frac{1}{n+1+c-a}\right)\\&=a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c-a}-\frac{1}{n+1+c-a}\right)=1-a\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{n+1+c-a}\right),\end{aligned}$$

当 $n\in\mathbb{N}_0$ 时，函数 $a\mapsto a\left[1/(c-a)+1/(n+1+c-a)\right]$ 在 $(0,c/2]$ 上严格单调上升，并且对任意的 $a\in(0,c/2]$ 满足

$$a\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{n+1+c-a}\right)\leq 1+\frac{c}{2n+2+c},$$

从而有 $\lambda_1(a,n)\geq -c/(2n+2+c)$，即

$$\tilde{\lambda}_1=\inf_{a\in(0,c/2]}\{\lambda_1(a,n)\}\geq-\frac{c}{2n+2+c}. \tag{2.1}$$

其次，证明 $\tilde{\lambda}_1=\inf_{a\in(0,c/2]}\{\lambda_1(a,n)\}\leq -c/(2n+2+c)$。

由于 $\lambda_1(c/2)=-c/(2n+2+c)$，所以有

$$\tilde{\lambda}_1=\inf_{a\in(0,c/2]}\{\lambda_1(a,n)\}\leq-\frac{c}{2n+2+c}. \tag{2.2}$$

从而由式(2.1)和式(2.2)综合可得，$\tilde{\lambda}_1=\inf_{a\in(0,c/2]}\{\lambda_1(a,n)\}=-c/(2n+2+c)$。

3. 主要定理的证明

证明：首先，根据式(1.1)定义表示，将函数 f_λ 级数展开，得

$$\begin{aligned} f_\lambda(a) &= a^{-\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a,k)(c-a,k+1)}{(c,k+1)k!}x^{k+1} \\ &= a^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,n+1+k)(c-a,n+2+k)}{(c,n+2+k)(n+1+k)!}x^{n+2+k} \end{aligned} \tag{3.1}$$

由式(3.1)可知，当 $a=c/2$ 时，

$$f_\lambda\left(\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{2}{c}\right)^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/2,n+1+k)(c/2,n+2+k)}{(c,n+2+k)(n+1+k)!}x^{n+2+k}=P_{2,n}(\lambda,c,x).$$

对式(3.1)利用式(1.2)可得

$$f_\lambda(a)=\frac{\Gamma(c)a^{1-\lambda}}{\Gamma(c-a)\Gamma(a+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n+1+k)\Gamma(c-a+n+2+k)}{\Gamma(c+n+2+k)\Gamma(n+2+k)}x^{n+2+k}.$$

显然，当 $\lambda<1$ 时， $f_\lambda(0^+)=0$；当 $\lambda=1$ 时， $f_\lambda(0^+)=P_n(x)$；当 $\lambda>1$ 时， $f_\lambda(0^+)=\infty$.

其次，函数 $f_\lambda(a)$ 对数求导，得

$$a\frac{f_\lambda'(a)}{f_\lambda(a)}=F_a(x)-\lambda \tag{3.2}$$

其中

$$F_a(x)=\frac{a\frac{\partial}{\partial a}\left(F(a,c-a;c;x)-F(a-1,c-a;c;x)-P_{1,n}(a,x)\right)}{F(a,c-a;c;x)-F(a-1,c-a;c;x)-P_{1,n}(a,x)}=a\frac{\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k}{\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k} \tag{3.3}$$

这里 $k,n\in\mathbb{N}_0$，且

$$A_k=\frac{g_{n+1+k}'(a)}{(c,n+2+k)(n+1+k)!},\quad B_k=\frac{g_{n+1+k}(a)}{(c,n+2+k)(n+1+k)!}.$$

由于 $B_k>0$，结合引理 2.4，可以得到 A_k/B_k 严格单调上升，从而根据引理 2.2，得到 $F_a(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升，并且有

$$\lim_{x\to0^+}F_a(x)=a\frac{g_{n+1}'(a)}{g_{n+1}(a)}=a\left(a_{n+2}-a_0-\frac{1}{n+1+a}\right).$$

结合引理 2.3 和引理 2.6，得到

$$\lim_{x\to0^+}F_a(x)=a\left(a_{n+1}-a_0-\frac{1}{n+1+c-a}\right)=\lambda_1(a,n).$$

同时，由式(3.3)有

$$F_a(x)=\frac{1}{1-\frac{F(a-1,c-a;c;x)}{F(a,c-a;c;x)}-\frac{P_{1,n}(a,x)}{F(a,c-a;c;x)}}\cdot F_{1,a}(x) \tag{3.4}$$

其中

$$
\begin{aligned}
F_{1,a}(x) &= a\frac{\frac{\partial}{\partial a}F(a,c-a;c;x)}{F(a,c-a;c;x)} - a\frac{\frac{\partial}{\partial a}F(a-1,c-a;c;x)}{F(a-1,c-a;c;x)}\cdot\frac{F(a-1,c-a;c;x)}{F(a,c-a;c;x)} - a\frac{\frac{\partial}{\partial a}P_{1,n}(a,x)}{F(a,c-a;c;x)} \\
&= F_{2,a}(x) - F_{3,a}(x)\cdot\frac{F(a-1,c-a;c;x)}{F(a,c-a;c;x)} - F_{4,a}(x)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

显然，由式(1.6)和式(1.7)有

$$
\lim_{x\to 1^-}\frac{F(a-1,c-a;c;x)}{F(a,c-a;c;x)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{P_{1,n}(a,x)}{F(a,c-a;c;x)} = \lim_{x\to 1^-}F_{4,a}(x) = 0 \tag{3.6}
$$

根据文章[7]中的式(2.28)，(2.35)，(2.37)及(2.38)，有：

$$
\lim_{x\to 1^-}F_{2,a}(x) = a\left[\psi(c-a)-\psi(a)\right] = \lambda(a) \tag{3.7}
$$

$$
\lim_{x\to 1^-}F_{3,a}(x) = a\left[\psi(c-a+1)-\psi(a)\right] \tag{3.8}
$$

所以根据式(3.4)~(3.8)，有 $\lim_{x\to 1^-}F_a(x) = \lambda(a)$.

因此，$F_a(x)$ 从 $(0,1)$ 到 (λ_1,λ) 严格单调上升，结合引理 2.5，引理 2.6，根据式(3.2)，有

$$
f_\lambda'(a)\ge 0 \Leftrightarrow \lambda \le \inf_{\substack{a\in(0,c/2]\\ x\in(0,1)}}\left\{F_a(x)\right\} = \inf_{a\in(0,c/2]}\left\{\lambda_1(a,n)\right\} = \tilde{\lambda}_1 = \frac{-c}{2n+2+c},
$$

$$
f_\lambda'(a)\le 0 \Leftrightarrow \lambda \ge \sup_{\substack{a\in(0,c/2]\\ x\in(0,1)}}\left\{F_a(x)\right\} = \sup_{a\in(0,c/2]}\left\{\lambda(a)\right\} = \bar{\lambda} = \begin{cases}1, & c\in(0,1],\\ \lambda^*, & c\in(1,\infty).\end{cases} \quad (\lambda^*\ge 1).
$$

综上即得 $f_\lambda(a)$ 在 $(0,c/2]$ 上的单调性。

下面证明不等式(1.8)，(1.9)，(1.10)成立。

1) 当 $\lambda=1$ 时，$c\in(0,1]$，$f_\lambda(a)$ 在 $(0,c/2]$ 上严格单调下降，则有

$$
(2a/c)\cdot\bar{P}_{2,n} \le F(a,c-a;c;x) - F(a-1,c-a;c;x) - P_{1,n}(a,x) \le aP_n(x) \tag{3.9}
$$

2) 当 $\lambda>1$ 时，$c\in(0,1]$，$f_\lambda(a)$ 在 $(0,c/2]$ 上严格单调下降，则有

$$
F(a,c-a;c;x) - F(a-1,c-a;c;x) - P_{1,n}(a,x) \ge (2a/c)^\lambda\cdot\bar{P}_{2,n}(c,x) \tag{3.10}
$$

由于 $a\in(0,c/2]$，函数 $\lambda\mapsto(2a/c)^\lambda$ 在 $\lambda\ge 1$ 上严格单调下降，因此，$(2a/c)^\lambda\le 2a/c$，故当 $\lambda\ge 1$，$c\in(0,1]$ 时，结合式(3.9)和式(3.10)，可以得到式(1.8)。

3) 当 $\lambda\le -c/(2n+2+c)$ 时，$c\in(0,\infty)$，$f_\lambda(a)$ 在 $(0,c/2]$ 上严格单调上升，则有 $0\le f_\lambda(a)\le(2/c)^\lambda\,\bar{P}_{2,n}(c,x)$，即得式(1.9)。

4) 当 $\lambda\ge\lambda^*$ 时，$c\in(1,\infty)$，$f_\lambda(a)$ 在 $(0,c/2]$ 上严格单调下降，则有 $f_\lambda(a)\ge(2/c)^\lambda\,\bar{P}_{2,n}(c,x)$，则得式(1.10)。

4. 说明

定理 1 是本文的主要结果，推广了文献[6]中的定理 1.2(3)及文献[7]中的定理 3.1(1)，具体如下：

1) 在定理 1 中，取 $n=0$，$x=r^2$，则 $P_{1,0}(a,r^2)=(1-a)r^2$。令 $c=1$，则

$$
f_\lambda(a) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{K_a(r)-E_a(r)-(1-a)r^2}{a^\lambda},
$$

即得文献[6]中定理 1.2(3)中结论。

2) 在定理 1 中，取 $c=1$， $x=r^2$，则

$$f_\lambda(a)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{K_a(r)-E_a(r)-\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,k)(1-a,k+1)}{k!(k+1)}r^{2(k+1)}}{a^\lambda},$$

即得文献[7]中定理 3.1(1)中结论。

本文所用方法可用于研究其他Gauss超几何函数与初等函数的组合函数的单调性质以及不等式性质，从而推广和改进原有结果。

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegum, I.A. (1965) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover, New York.

[2] Evans, R.J. (1988) Ramanujan's Second Notebook: Asymptotic Expansions for Hypergeometric Series and Related Function. In: Andrews, G.E., Askey, R.A., Berndt, B.C., Ramanathan, R.G. and Rankin, R.A., Eds., *Ramanujan Revisited*: *Proceedings of the Centenary Conference*, Academic Press, Boston, 537-560.

[3] 马晗茜，裘松良，鲍琪．零平衡超几何函数的几个性质[J]．浙江理工大学学报(自然科学版)，2019，41(6): 823-828.

[4] Ma, X.Y. and Huang, T.R. (2021) Inequalities for Gaussian Hypergeometric Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, **1**, 1-8. https://doi.org/10.7153/jmi-2021-15-01

[5] 屠国燕，裘松良，李艳莉，周培桂．广义椭圆积分对参数的依赖性[J]．浙江理工大学学报, 2010, 27(5): 848-852.

[6] Qiu, S.L., Ma, X.Y. and Bao, Q. (2020) Monotonicity Properties of Generalized Elliptic Integrals with Respect to the Parameter. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **492**, Article 122469. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124469

[7] Bao, Q., Wang, M.K. and Qiu, S.L. (2022) Monotonicity Properties of Gaussian Hypergeometric Functions with Respect to the Parameter. *Mathematical Inequalities and Applications*, **25**, 1021-1045. https://doi.org/10.7153/mia-2022-25-64

[8] Bao, Q., Wang, M.K. and Zhang, Y.A. (2022) One Answer to an Open Problem on the Monotonicity of Gaussian Hypergeometric Functions with Respect to Parameters. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, *Fisicas y Naturals*. *Serie A*, *Matemáticas*, **116**, Article No. 115. https://doi.org/10.1007/s13398-022-01258-w

[9] Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (1997) Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps. John Wiley & Sons, New York.

[10] Ponnusamy, S. and Vuorinen, M. (1997) Asymptotic Expansions and Inequalities for Hypergeometric Functions. *Mathematika*, **44**, 278-301. https://doi.org/10.1112/S0025579300012602