Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 688-698
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86093

Hans汉斯

Spectrum of Hausdorff Dimension on the Historic Set of the Asymptotically Additive Potentials

Tonghui Peng, Yalin Wang, Lingfang Xu, Guanzhong Ma

School of Mathematics and Statistics, Anyang Normal University, Anyang Henan
Email: maguanzhong75@aynu.edu.cn

Received: Nov. 2nd, 2018; accepted: Nov. 13th, 2018; published: Nov. 26th, 2018

Abstract

Authors conduct multifractal analysis of historic set of the asymptotically additive potentials on a class of non-uniformly expanding systems. They prove that either the historic set is empty or carries full Hausdorff dimension.

Keywords

Non-Uniformly Expanding, Asymptotically Additive Potentials, Historic Set

渐近可加势的“历史集”的Hausdorff维数谱

彭桐辉，王亚琳，徐玲芳，马冠忠

安阳师范学院数学与统计学院，河南 安阳
Email: maguanzhong75@aynu.edu.cn

收稿日期：2018年11月2日；录用日期：2018年11月13日；发布日期：2018年11月26日

摘 要

研究了一类非一致扩张系统中渐进可加势的“历史集”的Hausdorff维数谱的重分形分析，利用拼接n-级Bernoulli测度和构造Moran集的方法，证明了在该系统中渐近可加势的“历史集”的Hausdorff维数具有“择一性”。

关键词

非一致扩张系统，渐近可加势，历史集

文章引用: 彭桐辉, 王亚琳, 徐玲芳, 马冠忠. 渐近可加势的“历史集”的 Hausdorff 维数谱[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 688-698. DOI: 10.12677/pm.2018.86093

1. 引言

本文研究了一类非一致扩张系统上渐近可加函数列的“历史集”的重分形分析，证明了渐近可加势的“历史集”的 Hausdorff 维数谱具有“择一性”。首先做一概述。

1.1. “历史集”

设 (X,T) 为拓扑动力系统，即 X 为紧度量空间，$T:X\to X$ 为连续自映射，$C(X,\mathbb{R})$ 表示从 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数全体。给定 $\phi\in C(X,\mathbb{R})$，称 $S_n\phi:=\sum_{i=0}^{n-1}\phi\circ T^i$ 和 $A_n\phi:=\frac{1}{n}S_n\phi$ 分别为 ϕ 的 Birkhoff 和与 Birkhoff 均值。若存在 $\phi\in C(X,R)$，使得极限 $\lim_{n\to\infty}A_n\phi(x)$ 不存在，则称点 x 的轨道

$$\{x,Tx,T^2x,\cdots\}$$

有“历史行为”。这个名称最早是 Ruell 在[1]中提出的，本文沿用 Ruell 的定义，把轨道具有“历史行为”的点的全体称为“历史集”。在[2]中 Takens 进一步研究了“历史集”，并提出了如下问题：是否存在一类光滑的动力系统，这类系统有“历史行为”的初始点集具有正测度的性质是稳定的。该问题被称为“Takens last problem”。到目前为止，有很多学者对“Takens last problem”进行了大量的研究并得到了一些深入的结果。如在[3]中，作者证明了闭曲面上 r 阶微分同胚中任一 Newhouse 开集都有稠子集，此稠子集中任一元都有一个压缩游荡域是“历史集”，从而部分回答了“Takens last problem”，更多有关“Takens last problem”的内容见文献[4]。

如果点 x 使得对每一个 $\phi\in C(X,\mathbb{R})$，极限 $\lim_{n\to\infty}A_n\phi(x)$ 都存在，称点 x 为“通有点”。点 x 的 Birkhoff 均值的极限不存在，意味着当时间 n 趋向无穷时，点 T^nx 对下一步要去哪里始终有新的“想法”。若点 x 为“通有点”，对每一个观察函数 ϕ 来说，因 $\lim_{n\to\infty}A_n\phi(x)$ 存在，所以“通有点”的轨道行为是完全可以预测的。因此“历史点”的轨道比“通有点”的轨道包含了更多的信息。Ruell 和 Takens 认为“历史集”有更重要的研究意义。给定 $\phi\in C(X,\mathbb{R})$，称 $\mathrm{H}(\phi;X,T):=\{x\in X:\lim_{n\to\infty}A_n\phi(x)\text{不存在}\}$ 为关于 ϕ 的“历史集”。易见 $\mathrm{H}(\phi;X,T)$ 是“历史集”的一个子集，“历史集”是所有连续函数 ϕ 的“历史集” $\mathrm{H}(\phi;X,T)$ 的并集。为简化记号，以下简记 $\mathrm{H}(\phi;X,T)$ 为 $\mathrm{H}(\phi)$。

近些年来，很多学者对“历史集”的结构和性质有浓厚的兴趣，对“历史集”进行了大量的研究，得到了很多深刻的结果，见[1]-[15]。由 Birkhoff 遍历定理知，对任一 T-不变测度 μ，都有 $\mu(\mathrm{H}(\phi))=0$，这意味着从测度范畴看，“历史集”是可以忽略不计的，因此，在动力系统和几何测度论中，人们一直认为“历史集”没有包含系统的本质信息，没有进一步研究的必要。然而文献[5]的研究结论彻底颠覆了这个观点，在大多数的系统中，特别是一致双曲系统中，“历史集”或者具有满的拓扑熵，或者具有满的 Hausdorff 维数，这表明“历史集”是一个很大的集合，在某种程度上包含了系统的所有信息。文献[6]证明了在有限型子转称斥子中“历史集”若非空，就具有满的 Hausdorff 维数，D. Tompson 在[7]中证明了若系统有某些弱的 Specification 性质，则该系统中的“历史集”若非空，就具有满的拓扑压力。Barreira 等在[8]中从拓扑观点研究“历史集”，证明了若有限型子位移具有弱的 Specification 性质，则该系统中的“历史集”只要不是空集，就是剩余集。

以上的文章研究的都是一致双曲系统中的“历史集”，他们证明了一致双曲系统中的“历史集”的拓扑熵，Hausdorff 维数都具有“择一性”，即非空即满。在非一致双曲系统中，因为非双曲周期点的出现，使得非一致双曲系统的动力学行为比一致双曲系统更加复杂，因此关于非一致双曲系统的“历史集”，到目前为止，研究结果还比较少。文献[9]得到了一类非一致双曲系统中“饱和集”的拓扑熵的变分公式，并证明了在该类系统中“历史集”具有满拓扑熵的性质是 C^1 稳定的。[10]中作者证明了在 Lorenz 流的一个俘获区中，“历史集”是剩余集。[11]中作者证明了在一类非一致扩张系统中，几乎可加势的“历史集”的 Hausdorff 维数具有“择一性”。

本文研究了一类一维非一致扩张系统中渐进可加势的“历史集”，证明了该类系统中渐进可加势的“历史集”的 Hausdorff 维数谱也具有“择一性”。下面介绍本文要研究的非一致扩张系统。

1.2. 系统与符号

本文考虑如下模型，令 $T:\bigcup_{i=1}^{m} I_i \to [0,1]$ 是分段 C^{1+r} 映射，其中 $r>0$， $I_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 是 $[0,1]$ 的 m 个子区间，满足如下条件：

1、若 $i\neq j$，则 $\operatorname{int}(I_i)\cap\operatorname{int}(I_j)=\varnothing$，本文中 $\operatorname{int}(I_i)$ 指集合 I_i 的内部；

2、对 $1\le i\le m$， $T|_{I_i}:I_i\to[0,1]$ 是 C^{1+r} 的满射，且存在唯一 $x_i\in I_i$ 满足 $T(x_i)=x_i$ 且 $T'(x_i)\ge 1$。若 $T'(x_i)=1$，则称 x_i 为抛物不动点，否则称 x_i 为扩张不动点；

3、若 $x\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，则 $T'(x)>1$。

抛物不动点的出现使本文考虑的系统和一致双曲系统有很大不同，在抛物不动点附近，系统的动力行为变得异常复杂。下面定义不变吸引子，

$$\Lambda:=\left\{x\in\bigcup\nolimits_{j=1}^{m} I_j \,\middle|\, T^n(x)\in I, \text{对一切 } n\ge 0\right\}.$$

这类非一致双曲映射包含著名的 Manneville-Pomeau 映射，即 $T:[0,1]\to[0,1]$， $Tx=x+x^{1+\beta}\bmod 1$，其中 $0<\beta<1$。

上述系统有一个自然的编码：对 $i=1,\cdots,m$， 令 T_i 为 $T|_{I_i}:I_i\to[0,1]$ 的逆映射。令 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ 是左平映射，满足 $\sigma\left((\omega_n)_{n\ge1}\right)=(\omega_n)_{n\ge2}$。定义编码映射 $\Pi:\Sigma\to I$ 如下：

$$\Pi(\omega):=\lim_{n\to\infty}T_{\omega_1}\circ T_{\omega_2}\cdots\circ T_{\omega_n}([0,1]).$$

不难验证 $\Pi(\Sigma)=\Lambda$ 且 $\Pi\circ\sigma(\omega)=T\circ\Pi(\omega)$。特别指出编码映射 Π 在除去至多可个点外是双射。

给定拓扑动力系统 (X,T)，本文用 $M(X,T)$ 和 $E(X,T)$ 分别表示 X 上 T-不变 Borel 概率测度全体和遍历的 T-不变 Borel 概率测度全体。下面介绍渐近可加势。

1.3. 渐近可加势

设 $\Phi=(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ 为一列定义在 X 上的连续函数，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $g_\varepsilon\in C(X,\mathbb{R})$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\|\phi_n-S_n g_\varepsilon\right\|<\varepsilon,$$

称 Φ 为渐近可加势，其中对给定的 $f\in C(X,\mathbb{R})$， $\|f\|$ 是上确界范数。

若 Φ 满足下述条件，称 Φ 为可加势，对 $\forall n\ge1$， $\forall m\ge1$， $\forall x\in X$，都有 $\phi_{n+m}(x)=\phi_n(x)+\phi_m(T^n x)$。

易见，若 Φ 为可加势，则 $\phi_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\phi_1(T^i x)$。若 Φ 满足下述条件，称 Φ 为几乎可加势：

1、对每个 $n\ge1$， $\phi_n:X\to\mathbb{R}$ 连续；

2、存在正常数$C(\Phi)$，对任意给定的$n,p\in\mathbb{N}$和任意给定的$x\in X$，有下式成立，

$$\left|\phi_{n+p}(x)-\phi_n(x)-\phi_p(T^n x)\right|\le C(\Phi).$$

其中$C(\Phi)$为和Φ有关的常数。

对给定的渐进可加势$\Phi=(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$，令$\mathrm{H}(\Phi):=\left\{x\in X:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\phi_n(x)\text{不存在}\right\}$为$\Phi$的“历史集”。令$\Phi_*(\mu)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X\phi_n\mathrm{d}\mu$，由渐进可加势的定义，易证上述极限是存在的。令$\Omega_\Phi=\{\Phi_*(\mu):\mu\in M(X,T)\}$。文献[12]中引理A.5证明了几乎可加势一定是渐近可加势，文献[13]中的例1给出了一个渐近可加势不是几乎可加势的例子，从而本文结论包含了文献[11]中的结果。

1.4. 主要结果

本文证明了如1.2节中定义的非一致扩张系统中渐近可加势的“历史集”的Hausdorff维数有“择一性”，依惯例用$\dim_H A$表示集合A的Hausdorff维数。

定理2.1：吸引子Λ和$C^{1+\gamma}$映射$T:\Lambda\to\Lambda$如1.2节中所定义，Φ为渐近可加势，则下列情形有且仅有一个成立

1、$\mathrm{H}(\Phi)=\varnothing$当且仅当$\Omega_\Phi$是单点集；

2、$\mathrm{H}(\Phi)\ne\varnothing$当且仅当$\dim_H\mathrm{H}(\Phi)=\dim_H\Lambda$。

注1：在本文所研究的非一致扩张系统中，我们不确定T的$C^{1+\gamma}$正则性假设是否可以减弱到C^1条件。这对应于动力系统中一个著名的问题：双曲测度的Hausdorff维数是否可以任意逼近吸引子的维数。文献[16]中定理4.6表明，在T的每个逆映射是$C^{1+\gamma}$的条件下，再加上一些几何的假设，该问题的答案是肯定的。文献[17]中研究结果表明，对$C^{1+\mathrm{Lip}}$可扩系统的极限集和传递Markov系统的极限集，该问题的答案也是肯定的。然而在非一致扩张系统中，在T仅有C^1正则性的条件下，双曲测度的Hausdorff维数能否任意逼近吸引子的维数，仍然是动力系统的维数理论中一个开问题。文献[18]中提出在本文所考虑的非一致扩张系统中，T的C^1正则性足以建立定理2.1，但未给出证明。

2. 记号和预备知识

本节引入一些记号和必要的引理。

令$A=\{1,2,\cdots,m\}$，$\Sigma=A^{\mathbb{N}}$，令$\Sigma_n:=\{w=w_1\cdots w_n\mid w_i\in A\}$是长为$n$的词的全体。$\omega=\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}\in\Sigma$，记$\omega|_n=\omega_1\cdots\omega_n$。对词$w\in\Sigma_n$，令$[w]:=\{\omega\in\Sigma\mid\omega|_n=w\}$是由$w$确定的长为$n$的柱集。对给定的连续函数$\phi:\Sigma\to\mathbb{R}$，称

$$\mathrm{Var}_n\phi:=\sup_{\omega|_n=\tau|_n}\left|\phi_n(\omega)-\phi_n(\tau)\right|$$

为ϕ的n-级变差，同时令$\|\phi\|:=\sup_{\tau\in\Pi}|\phi(\tau)|$。

用$\hat{\Lambda}:=\{x\in\Lambda\mid\#\{\Pi^{-1}(x)\}=2\}$表示吸引子中有两个编码的点，其中$\#A$表示集合$A$的元素个数。在本文条件下，$\hat{\Lambda}$和$\Pi^{-1}\hat{\Lambda}$都是至多可数集，$\Pi:\Sigma\setminus\Pi^{-1}\hat{\Lambda}\to\Lambda\setminus\hat{\Lambda}$是双射。对长为$n$的词$w=w_1w_2\cdots w_n$，记$I_w=T_{w_1}\circ T_{w_2}\circ\cdots\circ T_{w_n}(I)$，对$\omega\in\Sigma$，记$I_n(\omega)=I_{\omega|_n}$。用$D_n(\omega)$表示$I_n(\omega)$的直径，同时令$g_n(\omega):=-\log T'_{\omega_1}\Pi(\sigma\omega)$，令

$$A_n g(\omega):=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}g(T^i(\omega)).$$

由文献[16]的引理 2.1 和文献[18]引理 1 可知，$A_n g(\omega)$ 可一致逼近 $D_n(\omega)$。

引理 2.1：设 T 为 1.2 节所定义的非一致扩张映射，则 $D_n(\omega)$ 一致收敛到 0，且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\omega\in\Sigma}\left\{\left|-\frac{1}{n}\log D_n(\omega)-A_n g(\omega)\right|\right\}=0.$$

令 $\hat{\lambda}_n(\omega)=-\frac{1}{n}\log D_n(\omega)$，对给定的 σ-不变测度 μ，令 $\lambda(\mu,\sigma):=\int_\Sigma g\mathrm{d}\mu$ 是 μ 的 Lyapunov 指数，$\Pi_*\mu:=\mu\circ\Pi^{-1}$ 是 μ 的像测度。下面引理组合了文献[18]中的引理 2 和引理 3，在定理 2.1 的证明中起着本质作用。

引理 2.2：对任意给定的 σ-不变测度 μ，都存在遍历的 σ-不变测度序列 $\{\mu_n:n\ge 1\}$，使得 $\{\mu_n:n\ge 1\}$ 依弱星拓扑收敛到 μ，且

$$h(\mu_n,\sigma)\to h(\mu,\sigma),\ \lambda(\mu_n,\sigma)\to\lambda(\mu,\sigma).$$

下面引理表明映射 $\Phi_*:M(\Sigma,\sigma)\to\mathbb{R}$ 是连续的。

引理 2.3：给定渐进可加势 Φ，μ 为 σ-不变测度，$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M(\Sigma,\sigma)$ 且在弱星拓扑下收敛到 μ，则有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int\phi_m\mathrm{d}\mu_n=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int\phi_m\mathrm{d}\mu.$$

即 $\lim_{n\to\infty}\Phi_*(\mu_n)=\Phi_*(\mu)$。

3. 定理 2.1 的证明

首先有下述结论，若 $\mathrm{H}(\Phi)\ne\varnothing$，则有 $\#\Omega_\Phi\ge 2$。事实上，若 $\mathrm{H}(\Phi)\ne\varnothing$，取 $x\in\mathrm{H}(\Phi)$，令 $\bar{\alpha}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\phi_n(x)}{n}$，$\underline{\alpha}=\liminf_{n\to\infty}\frac{\phi_n(x)}{n}$，$\varepsilon=\frac{1}{6}(\bar{\alpha}-\underline{\alpha})$，则 $\varepsilon>0$，由渐进可加势定义，存在连续函数 h 和正整数 K，使得对任意给定的 $n>K$，任意给定的 $x\in X$，有

$$\frac{1}{n}\left|\phi_n(x)-S_n h(x)\right|<\varepsilon,$$

存在自然数的子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\bar{\alpha}=\lim_{k\to\infty}\frac{\phi_{n_k}(x)}{n_k}$，不妨设 $\lim_{k\to\infty}A_{n_k}h(x)$ 存在，否则用上极限代替。令 $M(X)$ 为 X 上概率测度全体，因 $M(X)$ 在弱星拓扑下是紧的，取 μ 为概率测度序列 $\left\{\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\delta_{T^ix}\right\}_{k=1}^{\infty}$ 的聚点，其中 δ_x 为 Dirac 测度，易证 $\mu\in M(X,T)$。则有

$$\bar{\alpha}\le\int_X h\mathrm{d}\mu+\varepsilon\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X\phi_n\mathrm{d}\mu+2\varepsilon=\Phi_*(\mu)+2\varepsilon.$$

同理可证，存在 $\nu\in M(X,T)$，使得 $\Phi_*(\nu)\le\underline{\alpha}+2\varepsilon$。故有

$$\Phi_*(\nu)\le\underline{\alpha}+2\varepsilon<\bar{\alpha}-2\varepsilon\le\Phi_*(\mu),\ 即\ \Phi_*(\nu)\ne\Phi_*(\mu).$$

令 $\hat{\Phi}=\Phi\circ\Pi$，易证 $\Omega_\Phi=\Omega_{\hat{\Phi}}$ 且 $\mathrm{H}(\Phi)=\Pi\mathrm{H}(\hat{\Phi})$。则定理 1 是下述引理的直接推论。

引理 3.1：对任意给定的 σ-不变测度 μ 和 ν 满足 $\lambda(\mu,\sigma)>0$，$\lambda(\nu,\sigma)>0$，且 $\hat{\Phi}_*(\mu)\ne\hat{\Phi}_*(\nu)$，则有下式成立

$$\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{H}(\Phi)\ge\min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)},\frac{h(\nu,\sigma)}{\lambda(\nu,\sigma)}\right\}.$$

因 T 是 $C^{1+\gamma}$ 连续，由文献[16]的定理 4.6 可知，

$$\dim_{\mathrm{H}}\Lambda=\sup_{\mu\in M(\Sigma,\sigma)}\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)}\Big|\,\lambda(\mu,\sigma)>0\right\}.$$

故对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 σ-不变测度 μ，满足 $h(\mu,\sigma)/\lambda(\mu,\sigma)\ge\dim_{\mathrm{H}}\Lambda-\varepsilon$。记 $\alpha=\hat{\Phi}_*(\mu)$，因 $\#\Omega_{\Phi}\ge2$，故存在 σ-不变测度 ν 满足 $\hat{\Phi}_*(\nu)=\beta\ne\alpha$。对 $0<s<1$，令 $\mu_s=s\mu+(1-s)\nu$，则 $\hat{\Phi}_*(\mu_s)\ne\alpha$。由引理 5，对所有 $0<s<1$，下式成立，

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{H}(\Phi)&\ge\min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)},\frac{h(\mu_s,\sigma)}{\lambda(\mu_s,\sigma)}\right\}\\&=\min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)},\frac{sh(\mu,\sigma)+(1-s)h(\nu,\sigma)}{s\lambda(\mu,\sigma)+(1-s)\lambda(\nu,\sigma)}\right\}\end{aligned}.$$

令 $s\to1$，可得由 ε 的任意性，定理 1 得证。下面证明引理 4。

引理 3.1 的证明融合了文献[6]中构造 Moran 集和文献[18]中拼接 n 级 Bernoulli 测度的方法。证明思路是在“历史集” $\mathrm{H}(\hat{\Phi})$ 中构造一个 Moran 集 M，使得渐进可加势的均值在 Moran 集的奇数层逼近 α，偶数层逼近 β，而且 Moran 集 M 的投影 ΠM 的 Hausdorff 维数满足

$$\dim_{\mathrm{H}}\Pi M\ge\min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)},\frac{h(\nu,\sigma)}{\lambda(\nu,\sigma)}\right\}.$$

为清晰起见，证明分以下 6 步：

步一：在奇数层构造 Moran 块

由引理 2.1 的结论，可以取到递减到 0 的序列 $(\varepsilon_i)_{i\ge1}$ 且满足对所有的 $n\ge2i-1$，有下列结论，

$$\begin{cases}\mathrm{var}_n\,A_ng<\varepsilon_{2i-1},\\ \max\limits_{\omega\in\Sigma}\left|\hat{\lambda}_n(\omega)-A_ng(\omega)\right|<\varepsilon_{2i-1}.\end{cases}\tag{1}$$

由引理 2.2 和引理 2.3，可以选择一列 σ-不变的遍历测度 $(\mu_{2i-1})_{i\ge1}$，使得下式成立，

$$\begin{cases}\left|h(\mu_{2i-1},\sigma)-h(\mu,\sigma)\right|<\varepsilon_{2i-1},\\ \left|\hat{\Phi}_*(\mu_{2i-1})-\alpha\right|<\varepsilon_{2i-1},\\ \left|\lambda(\mu_{2i-1},\sigma)-\lambda(\mu,\sigma)\right|<\varepsilon_{2i-1}.\end{cases}\tag{2}$$

记 $\alpha_{2i-1}=\hat{\Phi}_*(\mu_{2i-1})$，注意到 μ_{2i-1} 的遍历性，由 Birkhoff 遍历定理和 Shanon-Mcmillan-Breiman 定理，对 μ_{2i-1} a。e。的 $\omega\in\Sigma$，有下式成立，

$$\begin{cases}\dfrac{\hat{\phi}_n(\omega)}{n}\to\alpha,\\ A_ng(\omega)\to\lambda(\mu_{2i-1},\sigma),\\ -\dfrac{\log\mu_{2i-1}([\omega|_n])}{n}\to h(\mu_{2i-1},\sigma).\end{cases}\tag{3}$$

对任意给定的 $\delta>0$，由 Egoroff 定理，存在 $\Omega'(2i-1)\subset\Sigma$ 满足 $\mu_{2i-1}(\Omega'(2i-1))>1-\delta$ 且式(3)在 $\Omega'(2i-1)$ 上一致成立。故存在 $l_{2i-1}\ge2i-1$，使得对一切 $n\ge l_{2i-1}$ 和 $\omega\in\Omega'(2i-1)$，有下式成立，

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{n}\hat{\phi}_n(\omega)-\alpha_{2i-1}\right|<\varepsilon_{2i-1}, \\ \left|A_n g(\omega)-\lambda(\mu_{2i-1},\sigma)\right|<\varepsilon_{2i-1}, \\ \left|-\frac{\log\mu_{2i-1}([\omega|_n])}{n}-h(\mu_{2i-1},\sigma)\right|<\varepsilon_{2i-1}. \end{cases} \tag{4}$$

令$\Sigma(2i-1)=\left\{\omega|_{l_{2i-1}}\mid\omega\in\Omega'(2i-1)\right\}$，称$\Sigma(2i-1)$为(2*i*-1)-级 Moran 块，$\Sigma(2i-1)$是构造 Moran 集的基本模块。再令

$$\Omega(2i-1)=\bigcup_{\omega\in\Sigma(2i-1)}[\omega],$$

则有

$$\begin{aligned}\mu_{2i-1}(\Omega(2i-1))&\ge\mu_{2i-1}(\Omega'(2i-1))\\&\ge 1-\delta\end{aligned}.$$

步二：在偶数层构造 Moran 块

此步完全类似于步一，为方便读者，给出完整步骤。对一切$n\ge 2i$，有下式成立，

$$\begin{cases} \operatorname{var}_n A_n g<\varepsilon_{2i}, \\ \max\limits_{\omega\in\Sigma}\left|\hat{\lambda}_n(\omega)-A_n g(\omega)\right|<\varepsilon_{2i}. \end{cases} \tag{5}$$

由引理 2.2 和引理 2.3，可选择一列 σ-不变的遍历测度$(\nu_{2i})_{i\ge1}$，使得下式成立，

$$\begin{cases} \left|h(\nu_{2i},\sigma)-h(\nu,\sigma)\right|<\varepsilon_{2i}, \\ \left|\hat{\Phi}_*(\nu_{2i})-\beta\right|<\varepsilon_{2i}, \\ \left|\lambda(\nu_{2i},\sigma)-\lambda(\nu,\sigma)\right|<\varepsilon_{2i}. \end{cases} \tag{6}$$

记$\hat{\Phi}_*(\nu_{2i})=\beta_{2i}$，由$\nu_{2i}$的遍历性可知，对$\nu_{2i}$ a..e.的$\omega\in\Sigma$有下列结果，

$$\begin{cases} \frac{\hat{\phi}_n(\omega)}{n}\to\beta_{2i}, \\ A_n g(\omega)\to\lambda(\nu_{2i},\sigma), \\ -\frac{\log\nu_{2i}([\omega|_n])}{n}\to h(\nu_{2i},\sigma). \end{cases} \tag{7}$$

对任意给定的$\delta>0$，存在$\Omega'(2i)\subset\Sigma$满足$\nu_{2i}(\Omega'(2i))>1-\delta$，而且存在$l_{2i}\ge 2i$，使得对一切$n\ge l_{2i}$和$\omega\in\Omega'(2i)$，有下述结论，

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{n}\hat{\phi}_n(\omega)-\beta_{2i}\right|<\varepsilon_{2i}, \\ \left|A_n g(\omega)-\lambda(\nu_{2i},\sigma)\right|<\varepsilon_{2i}, \\ \left|-\frac{\log\nu_{2i}([\omega|_n])}{n}-h(\nu_{2i},\sigma)\right|<\varepsilon_{2i}. \end{cases} \tag{8}$$

令

$$\Sigma(2i)=\left\{\omega|_{l_{2i}} \mid \omega\in\Omega'(2i)\right\},$$
$$\Omega(2i)=\bigcup_{w\in\Sigma(2i)}[w]$$

则有 $\nu_{2i}\left(\Omega(2i)\right)\geq\nu_{2i}\left(\Omega'(2i)\right)\geq 1-\delta$。式(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)在下面的证明中是必要的，第 4 步中证明 Moran 集在编码映射 Π 下的投影含于“历史集” $\mathrm{H}(\Phi)$ 和第 6 步中估计 Moran 测度的 Hausdorff 维数下界时将要用到这些式子。

步三：拼接 Moran 集

取 $N_0=1$，对 $i\geq 1$，令 $N_i=2^{l_{i+2}+N_{i-1}}$。N_i 是在第 i 层把 Moran 块重复拼砌的次数。令 Moran 集 M 为下述集合，

$$\overbrace{\Sigma(1)\cdots\Sigma(1)}^{N_1}\ \cdots\ \overbrace{\Sigma(i)\cdots\Sigma(i)}^{N_i}\cdots.$$

N_i 的选择在估计 Moran 集的 Hausdorff 维数时是至关重要的。

步四：Moran 集包含在“历史集”中

本步证明 Moran 集 M 的投影 ΠM 落在“历史集” $\mathrm{H}(\Phi)$ 中。

对 $j\geq 1$，令 $n_j=\sum_{i=1}^{j}l_iN_i$，固定 $\omega\in M$，注意到

$$\lim_{j\to\infty}\frac{l_2N_2+l_4N_4+\cdots+l_{2j}N_{2j}}{n_{2j+1}}=0.$$

利用式(1)，(2)，(4)，(5)，(6)，(8)，直接计算可得下面结论，

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\hat{\phi}_{n_{2j+1}}(\omega)}{n_{2j+1}}=\alpha,$$
$$\lim_{j\to\infty}\frac{\hat{\phi}_{n_{2j}}(\omega)}{n_{2j}}=\beta$$

这表明 $\Pi M\subset\mathrm{H}(\Phi)$。

步五：构造 Moran 测度

为简单起见，把 Moran 块 $\Sigma(i)$ 重新编号，构造测度 η，称 η 为 Moran 测度，同时得到两个重要的关系式(9)，(10)，这两个式子在第六步中估计 Moran 测度 η 的 Hausdorff 维数时是必要的。

为便于计算，当 i 为奇数时，令 $\eta_i=\mu_i$，当 i 为偶数时，令 $\eta_i=\nu_i$。把如下整数序列

$$\overbrace{l_1\cdots l_1}^{N_1}\cdots\overbrace{l_i\cdots l_i}^{N_i}\cdots$$

重新记为 $\left(l_i^*\right)_{i\geq 1}$。把如下 Moran 块序列

$$\overbrace{\Sigma(1)\cdots\Sigma(1)}^{N_1}\ \cdots\ \overbrace{\Sigma(i)\cdots\Sigma(i)}^{N_i}\cdots$$

重新记为 $\left\{\Sigma^*(i)\mid i\geq 1\right\}$。同样地，可得到如下序列 $\left\{\Omega'^*(i)\mid i\geq 1\right\}$，$\left\{\Omega^*(i)\mid i\geq 1\right\}$，$\left\{\eta_i^*\mid i\geq 1\right\}$，$\left\{\varepsilon_i^*\mid i\geq 1\right\}$。对任意给定的 $n\geq 1$，存在唯一正整数 $J(n)$，使得

$$\sum_{i=1}^{J(n)}l_i^*\leq n<\sum_{i=1}^{J(n)+1}l_i^*;$$

同样存在唯一正整数 $r(n)$，使得

$$\sum_{i=1}^{r(n)} N_i \le J(n) < \sum_{i=1}^{r(n)+1} N_i .$$

这里，$J(n)$ 表示 n 在序列 $(l_i^*)_{i\ge1}$ 中位于哪一层，$r(n)$ 表示 $J(n)$ 在序列 $(N_i)_{i\ge1}$ 中位于哪一层，同时 $r(n)$ 也表明 n 位于 Moran 集 M 的第 $r(n)$ 层和第 $r(n)+1$ 层之间。由 $J(n)$ 的定义，可知下式成立，

$$J(n) \le J(n+1) \le J(n)+1,\ l^*_{J(n)+1} = l_{r(n)+1} \text{ 且 } l^*_{J(n)+2} \le l_{r(n)+2} \tag{9}$$

对 $j=1,2$，有

$$\frac{l^*_{J(n)+j}}{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^*} \le \frac{l_{r(n)+j}}{N_{r(n)} l_{r(n)}},$$

注意到对 $i \ge 1, N_i = 2^{l_{i+2}+N_{i-1}}$，可知下式成立，

$$\frac{l^*_{J(n)+j}}{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^*} \to 0, \text{ 且 } \frac{\sum_{i=1}^{J(n)+1} l_i^*}{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^*} \to 1 \tag{10}$$

现在定义 Moran 测度。对 $\omega \in \Sigma^*(i)$，令

$$\rho_\omega^i = \frac{\eta_i^*[\omega]}{\eta_i^*\left(\Omega^*(i)\right)}.$$

易见 $\sum_{\omega\in\Sigma^*(i)} \rho_\omega^i = 1$。记 $C_n := \left\{[\omega] : \omega \in \prod_{i=1}^n \Sigma^*(i)\right\}$，其中 $\prod_{i=1}^n \Sigma^*(i)$ 表示 $\Sigma^*(i)$ 的拼接。记 $\sigma\left(\{C_n : n\ge1\}\right)$ 是 $\{C_n : n\ge1\}$ 生成的 σ-代数。对 $[w]=[w_1\cdots w_n]\in C_n$，令

$$\hat{\eta}([w]) := \prod_{i=1}^n \rho_{w_i}^i,$$

其中 $\prod_{i=1}^n \rho_{w_i}^i$ 表示 $\rho_{w_i}^i$ 的乘积。记 η 为 $\hat{\eta}$ 到 M 的所有 Borel 子集的 Kolmogrov 扩张。η 自然是 Σ 上的测度，由 η 的构造可知 η 支撑在 M 上。

步六：估计 Moran 测度的 Hausdorff 维数下界

本步证明下式成立，对一切 $x \in \Pi M$，有

$$\liminf_{r\downarrow0} \frac{\log \Pi_*\eta B(x,r)}{\log r} \ge \min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)}, \frac{h(\nu,\sigma)}{\lambda(\nu,\sigma)}\right\} \tag{11}$$

由(11)式可知，$\dim_{\mathrm{H}} \Pi_*\eta \ge \min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)}, \frac{h(\nu,\sigma)}{\lambda(\nu,\sigma)}\right\}$，其中 $\liminf_{r\downarrow0} \frac{\log \Pi_*\eta B(x,r)}{\log r}$ 是测度 $\Pi_*\eta$ 在点 x 的下局部维数，

$$\dim_{\mathrm{H}} \Pi_*\eta := \sup\left\{ s\ge 0 \,\middle|\, \liminf_{r\downarrow0} \frac{\log \Pi_*\eta B(x,r)}{\log r} \ge s \text{ 对 } \Pi_*\eta \text{ a.e. } x\in\Lambda \right\}$$

是测度 $\Pi_*\eta$ 的 Hausdorff 维数，这部分内容读者可参看 Falconer 的专著[19]的第 10 章。注意到 $\mathrm{H}(\Phi) \supseteq \Pi M$ 且 η 支撑在 M 上，故有

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{H}(\Phi) \geq \dim_{\mathrm{H}} \Pi M \geq \dim_{\mathrm{H}} \Pi_* \eta \geq \min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)}, \frac{h(\nu,\sigma)}{\lambda(\nu,\sigma)}\right\}.$$

引理 5 得证。下面证明式(11)成立。

固定 $\omega \in M$，先估计 $D_n(\omega)$ 的下界。当 i 为奇数时，令 $\tau_i = \mu$，当 i 为偶数时，令 $\tau_i = \nu$。注意到 $D_n(\omega) = \mathrm{e}^{-n\hat{\lambda}_n(\omega)}$，下面估计 $\hat{\lambda}_n(\omega)$。利用式(1)，(4)，(2)和(5)，(6)，(8)，直接计算可得

$$n\hat{\lambda}_n(\omega) \leq \sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(\lambda(\tau_i,\sigma) + 4\varepsilon_i^*\right) + l_{J(n)+1}^* \left(\|g\| + \varepsilon_{J(n)}^*\right) := \rho(n).$$

易见 $\rho(n)$ 是单调递增的，而且有 $D_n(\omega) \geq \mathrm{e}^{-\rho(n)}$。

现在固定 $x \in \Pi M$ 和小的实数 $r > 0$，则存在唯一 $n = n(r)$，使得

$$\mathrm{e}^{-\rho(n+1)} \leq r < \mathrm{e}^{-\rho(n)} \tag{12}$$

回顾对 $\omega \in \Sigma$，$I_n(\omega) = T_{\omega_1} \circ T_{\omega_2} \circ \cdots \circ T_{\omega_n}(I)$，令

$$C := \left\{I_n(\omega) \mid \omega \in M \text{ 且 } I_n(\omega) \cap B(x,r) \neq \varnothing\right\}.$$

由 $D_n(\omega) \geq \mathrm{e}^{-\rho(n)}$ 可知 C 至多含有 3 个元素。任取 $\omega \in M$ 满足 $I_n(\omega) \in C$，则 $\omega|_n = w_1 w_2 \cdots w_{J(n)} v$，其中，$v$ 是 $\Sigma^*\left(J(n)+1\right)$ 中元素 $\hat{v}$ 的前缀，则有

$$\begin{aligned}\Pi_* \eta\left(I_n(\omega)\right) &= \prod_{i=1}^{J(n)} \frac{\eta_i^*\left([w_i]\right)}{\eta_i^*\left(\Omega^*(i)\right)} \cdot \frac{\eta_{J(n)+1}^*\left([v]\right)}{\eta_{J(n)+1}^*\left(\Omega^*\left(J(n)+1\right)\right)} \\ &\leq (1-\delta)^{-J(n)-1} \prod_{i=1}^{J(n)} \eta_i^*\left([w_i]\right)\end{aligned}.$$

故有

$$\begin{aligned}\log \Pi_* \eta\left(B(x,r)\right) &\leq -\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(-\frac{\log \eta_i^*\left([w_i]\right)}{l_i^*}\right) - \left(J(n)+1\right)\log(1-\delta) + \log 3 \\ &\leq -\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(h(\tau_i,\sigma) - 2\varepsilon_i^*\right) - \left(J(n)+1\right)\log(1-\delta) + \log 3\end{aligned}.$$

其中第 2 个不等式利用了(2)，(4)和(6)，(8)。由(12)式，同时注意到 $r \to 0$ 当且仅当 $n \to \infty$，则有

$$\begin{aligned}\liminf_{r \downarrow 0} \frac{\log \Pi_* \eta\left(B(x,r)\right)}{\log r} &\geq \liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(h(\tau_i,\sigma) - 2\varepsilon_i^*\right) + \left(J(n)+1\right)\log(1-\delta) - \log 3}{\sum_{i=1}^{J(n+1)} l_i^* \left(\lambda(\tau_i,\sigma) + 4\varepsilon_i^*\right) + l_{J(n+1)+1}^* \left(\|g\| + \varepsilon_{J(n+1)+1}^*\right)} \\ &= \liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(h(\tau_i,\sigma) - 2\varepsilon_i^*\right)}{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(\lambda(\tau_i,\sigma) + 4\varepsilon_i^*\right)} \\ &\geq \liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(\lambda(\tau_i,\sigma) + 4\varepsilon_i^*\right) \min\left\{\frac{h(\mu,\sigma) - 2\varepsilon_i^*}{\lambda(\mu,\sigma) + 4\varepsilon_i^*}, \frac{h(\nu,\sigma) - 2\varepsilon_i^*}{\lambda(\nu,\sigma) + 4\varepsilon_i^*}\right\}}{\sum_{i=1}^{J(n)} l_i^* \left(\lambda(\tau_i,\sigma) + 4\varepsilon_i^*\right)} \\ &\geq \min\left\{\frac{h(\mu,\sigma)}{\lambda(\mu,\sigma)}, \frac{h(\nu,\sigma)}{\lambda(\nu,\sigma)}\right\}\end{aligned}$$

其中等号利用了式(9)和(10)，最后一个不等式利用了下述事实：

设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 和是两个正实数序列，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

(11)式得证。

基金项目

河南省高等学校重点科研项目，项目编号：18A110007；安阳师范学院科研培育基金，项目编号：AYNUKP-2017-B21。

参考文献

[1] Ruelle, D. (2001) Historical Behaviour in Smooth Dynamical Systems. In: Broer, H., Krauskopf, B. and Vegter, G., Eds., *Global Analysis of Dynamical Systems*, Institute of Physics, London, 63-66.

[2] Takens, F. (2008) Orbits with Historic Behaviour, or Non-Existence of Averages. *Nonlinearity*, **21**, 33-36. https://doi.org/10.1088/0951-7715/21/3/T02

[3] Kiriki, S. and Soma, T. (2017) Takens' Last Problem and Existence of Non-Trivial Wandering Domains. *Advances in Mathematics*, **306**, 524-588. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.10.019

[4] Labouriau, I.S. and Rodrigues, A.A.P. (2017) On Takens' Last Problem: Tangencies and Time Averages near Heteroclinic Networks. *Nonlinearity*, **30**, 1876-1910. https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa64e9

[5] Luis, B. and Jörg, S. (2000) Sets of Non-Typical Points Have Full Topological Entropy and Full Hausdorff Dimension. *Israel Journal of Mathematics*, **116**, 29-70. https://doi.org/10.1007/BF02773211

[6] Fan, A.H., Feng, D.J. and Wu, J. (2001) Recurrence, Dimension and Entropy. *Journal of the London Mathematical Society*, **64**, 229-244. https://doi.org/10.1017/S0024610701002137

[7] Thompson, D. (2010) The Irregular Set for Maps with the Specification Property Has Full Topological Pressure. *Dynamical Systems*, **25**, 25-51. https://doi.org/10.1080/14689360903156237

[8] Luis, B., Li, J.J. and Claudia, V. (2014) Irregular Sets Are Residual. *Tohoku Mathematical Journal*, **66**, 471-489. https://doi.org/10.2748/tmj/1432229192

[9] Liang, C., Liao, G., Sun, W.X. and Tian, X.T. (2017) Variational Equalities of Entropy in Nonuniformly Hyperbolic Systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, **369**, 3127-3156. https://doi.org/10.1090/tran/6780

[10] Kiriki, S., Li, M.-C. and Soma, T. (2016) Geometric Lorenz Flows with Historic Behavior. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **36**, 7021-7028. https://doi.org/10.3934/dcds.2016105

[11] Ma, G.-Z. and Yao, X. (2017) Hausdorff Dimension of the Irregular Set in Non-Uniformly Hyperbolic Systems. *Fractals*, **25**, Article ID: 1750027. https://doi.org/10.1142/S0218348X1750027X

[12] Feng, D.J. and Huang, W. (2010) Lyapunov Spectrum of Asymptotically Sub-Additive Potentials. *Communications in Mathematical Physics*, **297**, 1-43. https://doi.org/10.1007/s00220-010-1031-x

[13] Zhao, Y., Zhang, L.B. and Cao, Y.L. (2011) The Asymptotically Additive Topological Pressure on the Irregular Set for Asymptotically Additive Potentials. *Nonlinear Analysis*, **74**, 5015-5022. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.04.065

[14] Feng, D.J., Lau, K. and Wu, J. (2002) Ergodic Limits on the Conformal Repellers. *Advances in Mathematics*, **169**, 58-91. https://doi.org/10.1006/aima.2001.2054

[15] Olsen, L. (2002) Divergence Points of Deformed Empirical Measures. *Mathematical Research Letters*, **9**, 701-713. https://doi.org/10.4310/MRL.2002.v9.n6.a1

[16] Urbański, M. (1996) Parabolic Cantor Sets. *Fundamenta Mathematicae*, **151**, 241-277.

[17] Gelfert, K. and Rams, M. (2009) Geometry of Limit Sets for Expansive Markov Systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, **361**, 2001-2020. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-08-04759-4

[18] Johansson, A., Jordan, T.M., Öberg, A., *et al*. (2010) Multifractal Analysis of Non-Uniformly Hyperbolic Systems. *Israel Journal of Mathematics*, **177**, 125-144. https://doi.org/10.1007/s11856-010-0040-y

[19] Falconer, K.J. (1997) Techniques in Fractal Geometry. John Wiley & Sons, Chichester, 169-176.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org